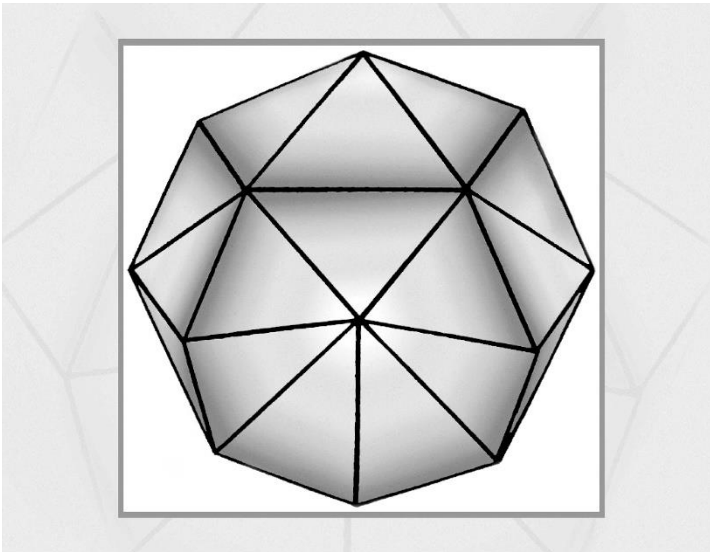
HISTORIA DE LA PROBABILIDAD
Y LA ESTADÍSTICA (VIII)

ESPAÑA ✦ MÉXICO ✦ ARGENTINA

HISTORIA DE LA PROBABILIDAD Y LA ESTADÍSTICA (VIII)



A.H.E.P.E.

Dirección

Jesús Santos del Cerro
Universidad de Castilla-La Mancha

Sonia de Paz Cobo
Universidad Rey Juan Carlos

DELTA
PUBLICACIONES

HISTORIA DE LA PROBABILIDAD
Y LA ESTADÍSTICA (VIII)
por A.H.E.P.E.

Editor gerente Fernando M. García Tomé
Diseño de cubierta OutDesign, Publishing Services
Preimpresión OutDesign, Publishing Services
Impresión Print House

ISBN 978-84-16383-70-2
Depósito Legal M-15048-2014

(0517-15)

Prólogo

Este libro recoge las ponencias presentadas al *VIII Congreso Internacional de Historia de la Estadística y de la Probabilidad* organizado por la *Asociación de Historia de la Estadística y de la Probabilidad de España (A.H.E.P.E.)*, junto con la Universidad Complutense, la Universidad Rey Juan Carlos y la Universidad de Castilla-La Mancha, y que tuvo lugar en el marco incomparable del *Real Centro Universitario Escorial-María Cristina*, los días 1, 2 y 3 de octubre de 2015. El *Real Centro* era la antigua *Casa de la Compaña*, que fue mandada construir por Felipe II en el siglo XVI para dar servicio a la corte y a sus huéspedes. En 1982 la reina regente María Cristina de Habsburgo, manda construir el *Real Centro de Estudios Superiores* y encomienda a los agustinos su administración y cuidado.

La apertura oficial del Congreso fue realizada por el profesor Miguel Angel Gómez Villegas, presidente de A.H.E.P.E., acompañado por el P. Agustín Alonso Rodríguez, Decano de Administración y Dirección de Empresas del Real Centro de Estudios Superiores y por el profesor Antonio Díaz-Cano, Decano de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense.

La conferencia inaugural, fue impartida por el profesor Knobloch sobre música y combinatoria en el siglo XVII, las conferencias plenarias corrieron a cargo de los profesores Eric Brian, que puso de manifiesto el cambio drástico necesario, que en su opinión, los expertos deben dar a la interpretación de la probabilidad, para enfrentarse al siglo XXI; y Laurent Mazliak, que recogió la figura de René Gateaux, como representante del matemático francés que quizá, mejor simboliza la grave pérdida que sufrió la ciencia, como consecuencia de las guerras mundiales, al tener que prescindir de figuras con líneas de investigación muy prometedoras.

Se estudiaron las figuras de algunos probabilistas y estadísticos, como Cardano, Caramuel, Monmort, Gosset y Gabriel y Galán, se recogieron los orígenes de algunos conceptos e instituciones, como *población*, *Sociedad Matritense de Amigos del*

País, *tablas de mortalidad*, *índices de concentración*, *econometría*, *fiabilidad* en psicometría, y se fijaron los comienzos de las *estadísticas de mortalidad* y de la *estadística contractual* española.

Desde otro punto de vista, se analizó la evolución del *muestreo* en las ciencias sociales, la estadística y la economía matemática en Cournot, la medida de la *desigualdad de Atkinson*, la aplicación de la probabilidad a la jurisprudencia en Leibniz y se plantearon los nuevos retos a los que van a tener que enfrentarse, presumiblemente, la estadística y la probabilidad en el siglo XXI, como los *big data* y el *análisis automático de datos.*

Aprovechando la figura del P. Agustín, el Congreso realizó una interesante visita al interior del Monasterio, para recorrer después la parte estándar guiada del mismo, de la que se encargó *El Patrimonio Nacional.* Por último, y dada la especialización histórica de los congresistas, se visitó la magnífica Biblioteca del mismo que nos fue explicada por el director de la misma que mostró el facsimil del primer documento del siglo XI en el que aparece por primera vez la notación arábiga de los números, entre otras joyas que conserva la Biblioteca del Monasterio.

Agradecemos a los patrocinadores del Congreso: la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense, la Universidad de Castilla-La Mancha, al Real Centro de Estudios Superiores El Escorial-Maria Cristina, al Patrimonio Nacional y a la Universidad Rey Juan Carlos, la ayuda prestada, sin su concurso no hubiera sido posible la organización de este evento.

El **Comité Científico** estuvo formado por José M. Arribas Macho (UNED), Jesús Basulto Santos (US), Antonio Franco Rodríguez-Lázaro (USP-CEU), Miguel Angel Gómez Villegas (UCM), Fco. Javier Martín Pliego (URJC), Mary Sol de Mora Charles (UPV), Jose María Riobóo Almanzor (USC) y Jesús Santos del Cerro (UCLM) y el **Comité Organizador** por Miguel Angel Gómez Villegas (UCM), Fco. Javier Martín Pliego (URJC), Sonia de Paz Cobo (URJC), Mary Sol de Mora Charles (UPV) y Jesús Santos del Cerro (UCLM).

A todos ellos mi más profundo agradecimiento.

Madrid, abril de 2017

Dr. Miguel Ángel Gómez Villegas
Presidente de A.H.E.P.E.

Contenido

CAPÍTULO 1

APROXIMACIÓN HISTÓRICA A LA EVALUACIÓN ESTADÍSTICA DE LA FIABILIDAD DE INSTRUMENTOS DE MEDICIÓN PSICOMÉTRICOS

CAROLINA LAGARES FRANCO
JUAN LUIS GONZÁLEZ CABALLERO
MARÍA JOSÉ ABELLÁN HERVÁS
MARTA ALMENARA ABELLÁN
JOSÉ ALMENARA BARRIOS

Universidad de Cádiz

1. INTRODUCCIÓN

Desde finales del siglo XIX y a lo largo del siglo XX, el área de la ciencia que se ha encargado de la construcción, análisis y evaluación de los instrumentos, test o escalas, utilizados para recoger información en disciplinas relacionadas con el comportamiento humano ha sido la Psicometría. En general, esta ciencia se encarga de aportar soluciones a los problemas que surgen en la medición de cualquier característica cuya definición no está exenta de subjetividad.

El estudio histórico de la evaluación de instrumentos de medida, en términos de fiabilidad, es una extensa tarea por los múltiples procedimientos que se han desarrollado para medirla y la complejidad de los conceptos que engloba.

Pretendemos en este trabajo realizar una síntesis histórica sobre las principales formas de evaluación de la fiabilidad de instrumentos, fundamentalmente test y escalas, que se han propuesto desde finales del siglo XIX hasta la actualidad.

Inicialmente repasaremos el concepto de medición y el de fiabilidad con el objetivo de comprender mejor por qué una gran cantidad de científicos dedicaron tiempo, esfuerzo y conocimientos a la creación de índices o coeficientes que garantizasen la calidad de aquello que deseaba ser medido.

Continuaremos con un recorrido cronológico del desarrollo de índices o coeficientes que evalúan fiabilidad, finalizando con un breve repaso de los más utilizados en la actualidad.

2. MEDICIÓN Y FIABILIDAD

Como apuntan Allen y Yen [1], podríamos decir que medir es el procedimiento por el cual asignamos números a objetos o individuos de forma sistemática para representar las propiedades que éstos poseen. El hecho de que puedan asignarse números o categorías utilizando reglas diferentes conduce a diferentes tipos de escalas y de procesos de medición [2]. Además, como afirma Bridgman [3], más que un proceso para asignar números utilizando reglas, la medición es un proceso mediante el cual se intenta comprender la naturaleza de la magnitud o variable que se mide.

En líneas generales, la fiabilidad de un instrumento de medida es entendida como el grado en el que una medición es consistente cuando se realiza en diversas ocasiones bajo las mismas condiciones, obteniéndose resultados similares al medir, ese decir, es estable en mediciones sucesivas [4]. Los estudios de fiabilidad surgieron por la necesidad de evaluar la garantía con la cual el resultado obtenido al realizar una medición se ajustaba al verdadero valor que deseaba ser medido.

Es fácil encontrar magnitudes que no presentan dificultad a la hora de ser medidas, ya que los instrumentos utilizados para tal fin son instrumentos objetivos (un metro, un peso, etc.). Esta facilidad procede del amplio consenso existente en establecer un patrón oro o *gold standard* que sirve de referencia para estas mediciones. Sin embargo, existen otro tipo de situaciones en las que las mediciones son complejas, bien porque se carece de un patrón oro o bien porque aquello que desea ser medido está cargado de cierta subjetividad, como puede ser el hecho de medir dolor, ansiedad o estrés. En estos casos, se dice que lo que se pretende medir es un constructo o una variable latente no observable, cuyo proceso de medida conlleva la conceptualización y definición de la naturaleza de la misma, la construcción de un instrumento que permita recoger esta variable latente a partir de las variables observables relacionadas con ella, y la definición de una clasificación o escala que permita diferenciar a los individuos medidos. El análisis de las principales características de los instrumentos de medición utilizados en este tipo de procesos es fundamental para garantizar la calidad de la información recogida.

Una vez que es creado el instrumento (en general en psicometría un test o escala), para medir un constructo, pueden surgir problemas. Un problema importante que puede surgir al evaluar a un individuo es que las puntuaciones de éste pueden variar de un test a otro, poniendo en cuestión si es correcto utilizar una sola puntuación para cada individuo. También puede ocurrir que varíe la ordenación que entre los individuos producen diferentes escalas. Las causas de estas variaciones, entre otros factores, pueden proceder de la propia persona que se esté midiendo, de la persona que recoge la información, o del momento o lugar en el que se realiza la medición. Controlar la variación en la medición (errores) de estos factores es fundamental para garantizar la calidad de aquello que desea ser medido, ya que los resultados que de ello se deriven pueden influir posteriormente en la toma de decisiones.

Por todo ello, al utilizar instrumentos diseñados para la investigación, es necesario establecer determinados requisitos que garanticen la calidad de la medición que se realice. Fundamentalmente se requiere que un instrumento sea *válido* y *fiable*. Decimos que un instrumento es válido cuando mide aquella característica del sujeto para la que ha sido construido, es decir, expresa el grado en que el valor que se obtiene en el proceso de medición se corresponde con el verdadero valor de la medida de un sujeto [4]. Como hemos comentado anteriormente, un instrumento es fiable cuando mide de forma reproducible. La fiabilidad es una condición previa a la validez dado que, si un instrumento no es fiable, es decir, no da puntuaciones o valores constantes de una ocasión a otra, o lo que es lo mismo, sus mediciones dependen de factores externos, no será válido para el fin propuesto. Sin embargo, un instrumento fiable no es suficiente para establecer la validez del mismo, dado que un instrumento puede dar medidas consistentes y no ser válido [5]. La imagen 1 expresa de forma gráfica ambos conceptos.

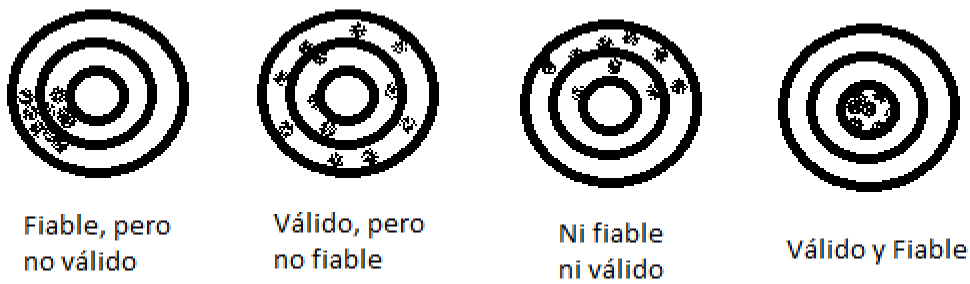


Imagen 1. Expresión gráfica de la validez y fiabilidad. (*Fuente*: Elaboración propia).

La falta de fiabilidad de un instrumento está relacionada con la intervención del error, entendiendo éste como cualquier efecto que influye en el proceso de medición.

El estudio, análisis y descomposición del error cometido en un proceso de medida, favorece la aparición de distintas definiciones e interpretaciones de la fiabilidad de un instrumento [6]. Por ejemplo, puede afirmarse que un instrumento es fiable cuando las puntaciones observadas de un individuo están altamente correlacionadas con su puntuación verdadera, entendiendo ésta como una puntuación latente del individuo que en general no es observable. También es posible, utilizando algunos supuestos, expresar la fiabilidad en términos de coeficientes de correlación de dos puntuaciones observadas de un mismo individuo (lo que se denominan test paralelos, es decir, diferentes instrumentos que miden el mismo constructo). No menos importante es la fiabilidad que puede analizarse de los instrumentos de medida (test, inventarios, cuestionarios, etc.) que están compuestos de ítems.

Todas estas situaciones han dado lugar a diversas interpretaciones y métodos para estimar la fiabilidad de un instrumento, dependiendo del objetivo a evaluar. No obstante, en general, un análisis de fiabilidad puede estar originado por dos tipos de objetivos principales:

(a) Tratar de evaluar la consistencia interna de un instrumento compuesto por ítems. La consistencia interna puede expresarse como el grado en que los ítems del instrumento que evalúan el mismo constructo se correlacionan entre ellos.

(b) Analizar la estabilidad de las puntuaciones que se obtienen al realizar observaciones repetidas con el mismo instrumento o con instrumentos equivalentes que midan el mismo constructo.

Éste último tipo de fiabilidad encierra muchas situaciones, dependiendo de si estamos interesados en el grado de acuerdo entre varios observadores (fiabilidad inter-observador), o el acuerdo entre diferentes ocasiones con el mismo observador (fiabilidad intra-observador) o entre dos ocasiones de los mismos individuos separadas por un intervalo de tiempo (test-retest). La Psicometría ha tratado de resolver el problema de proponer coeficientes de fiabilidad adecuados en cualquiera de los casos anteriores, que han tratado de cuantificar la consistencia o la estabilidad entre las múltiples observaciones que se realicen en una escala de 0 a 1.

3. DESARROLLO HISTÓRICO DE LOS COEFICIENTES ESTADÍSTICOS PARA EVALUAR LA FIABILIDAD PSICOMÉTRICA

La primera publicación oficial relacionada con la psicometría tuvo lugar en 1860 de la mano de Gustav Fechner (1801-1887) [7] que establece una relación logarítmica entre la medida de un estímulo psíquico y la medida de la sensación observada. Sin embargo, algunos autores consideran a Francis Galton (1822-1911) (Fig. 1) como el fundador de la psicometría moderna [8], [9], [10] por sus contribuciones realizadas en el campo de la antropometría, donde analizó no sólo las características antropométricas de los individuos sino la variabilidad de dichas características, siendo el pionero en el tratamiento del error en mediciones [11]. Además, Galton ideó conceptualmente el coeficiente de correlación que posteriormente desarrolló Karl Pearson (1857-1936), que en ocasiones ha sido utilizado para valorar la fiabilidad de mediciones, aunque posteriormente se comprobó que no es útil cuando las mediciones realizadas son sistemáticamente diferentes unas de otras [12].

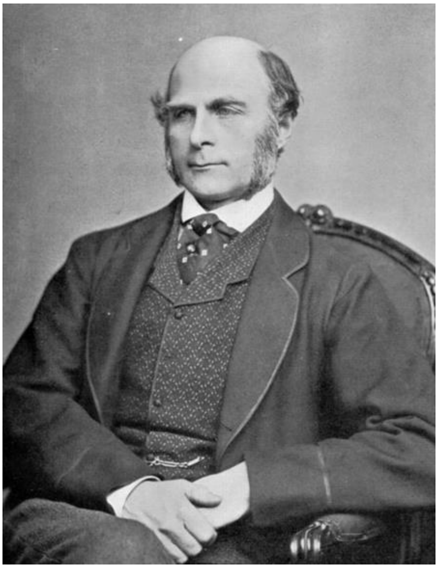


Figura 1.-Francis Galton (1822-1911).

La herencia de Galton [10] se dejó sentir en Charles Edward Spearman (1863-1945) (Figura 2), psicólogo británico que se formó en las universidades de Leipzig, Wurzburgo y Göttingen y destacó por sus estudios sobre la inteligencia y las aptitudes humanas. Desarrolló la Teoría Bifactorial de la inteligencia, que fue la primera teoría de organización de rasgos, basada en el análisis estadístico de puntuaciones obtenidas en tests. Spearman partió del supuesto que toda actividad cognoscitiva es función de dos factores, uno general *g*, común a cualquier actividad, y otro específico *s*, exclusivo de cada actividad e independiente de las demás y de *g* [9]. Además, fue precursor de técnicas estadísticas como el coeficiente de correlación por rangos que lleva su nombre en el que correlaciona el orden realizado en un grupo de individuos a través de dos mediciones diferentes.

A partir de los trabajos de estos predecesores, el instrumento más utilizado para medir determinadas características del comportamiento humano fue el test compuesto por una serie de ítems. Estos instrumentos se construyeron (y se construyen) para recoger las múltiples partes de información de un constructo que se pretende estudiar, de forma que el total de las partes a partir de la suma de las puntuaciones (o cualquier otro parámetro) es capaz de medir mejor dicho constructo.

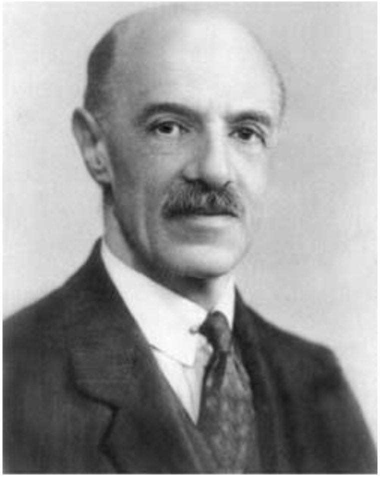


Figura 2. Charles Edward Spearman (1863-1945)

De esta forma, los procedimientos para estimar fiabilidad de esos instrumentos comenzaron a desarrollarse en la primera mitad el siglo XX, a partir de los artículos de Spearman [13] y Brown [14], que establecieron la relación algebraica entre la longitud de un test y su fiabilidad para determinados tipos de ítems.

Uno de los primeros planteamientos en este ámbito fue la necesidad de medir la fiabilidad de una puntuación compuesta, teniendo en cuenta que es razonable pensar que debe haber una relación entre la fiabilidad de la puntuación compuesta y la de sus componentes.

Como solución a esta situación surgió la denominada fórmula de Spearman-Brown (1910), que trata de obtener la fiabilidad de una puntuación compuesta por la suma de otras:

$$X = X_1 + ... + X_p$$

Desde una perspectiva general, un investigador tiene acceso a $p \geq 2$ test paralelos, $X_1, \ldots, X_p$ y está interesado en la puntuación $X = X_1 + \ldots + X_p$. Al ser test paralelos, tienen la misma varianza σ^2, y la covarianza entre cualquiera dos test es igual a la varianza de la puntuación verdadera (que es la misma en todos los test) σ_t^2. Calculando el cociente entre la varianza de la puntuación verdadera y la varianza de X se obtiene el coeficiente:

$$\rho_X = \frac{p\rho}{1+(p-1)\rho}$$

Este coeficiente mide la fiabilidad de la puntuación de *X*, compuesto de *p* test paralelos como una función no lineal de la fiabilidad de cualquiera de ellos (ρ).

Años más tarde, en 1937, de la mano de Kuder y Richardson [15], fue desarrollado y publicado el primer coeficiente de fiabilidad que estimaba *la consistencia interna* de un test (Figura 3). Este coeficiente permitía estimar la fiabilidad a partir de una sola administración del test. En su propuesta, las ecuaciones numeradas 20 y 21 llegaron a ser los famosos coeficientes KR-20 y KR-21. La primera de estas fórmulas, la denominada KR-20, es aplicable cuando en un test compuesto los ítems son dicotómicos, y tiene por expresión:

$$\hat{\rho}_{X,20} = \frac{p}{p-1}\left[1 - \frac{\sum_{k=1}^{p}\hat{r}_k\left(1-\hat{r}_k\right)}{\hat{r}_X}\right]$$

donde $\hat{r}_k$ representa la frecuencia relativa de respuestas correctas en la componente *k*.

Si las componentes del instrumento tienen la misma dificultad, la fórmula anterior se convierte en la fórmula KR-21:

$$\hat{\rho}_{X,21} = \frac{p}{p-1}\left[1 - \frac{\hat{\mu}\left(p-\hat{\mu}\right)}{p\hat{\sigma}_X}\right]$$

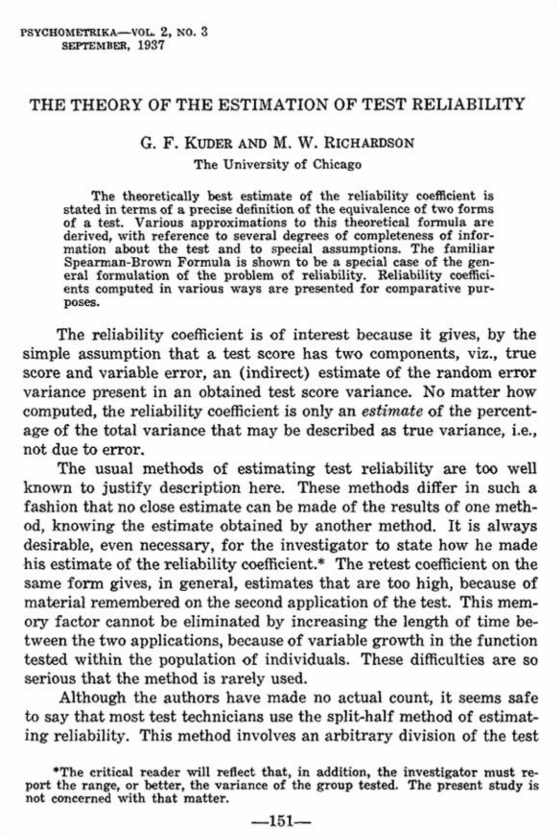
donde $\hat{\mu}$ es la media de la puntuación total.

En 1939, se desarrolla el método de Rulon [16], en el que un test es dividido en sus dos mitades para ser consideradas formas paralelas. Este método supone que las puntuaciones de los individuos en cada una de las dos mitades sólo pueden diferir a causa de errores aleatorios. De esta forma, la varianza de las diferencias entre las dos mitades es considerada como una estimación de la varianza de los errores, dando lugar a la fórmula de fiabilidad de Rulon:

$$r_{XX'} = 1 - \frac{s_d^2}{s_X^2}$$

siendo s_d^2, la varianza de las diferencias de las puntaciones de los individuos en las dos mitades del test y s_X^2 , la varianza de las puntaciones totales de los individuos.

Es curioso destacar en este punto que en 1937 y 1945, Guttman y Flanagan respectivamente y de forma independiente, obtuvieron una fórmula equivalente a la de Rulon a partir de la varianza de ítems pares e impares, pero de cálculo más sencillo [16].



PSYCHOMETRIKA—VOL. 2, NO. 3
SEPTEMBER, 1937

THE THEORY OF THE ESTIMATION OF TEST RELIABILITY

G. F. KUDER AND M. W. RICHARDSON
The University of Chicago

The theoretically best estimate of the reliability coefficient is stated in terms of a precise definition of the equivalence of two forms of a test. Various approximations to this theoretical formula are derived, with reference to several degrees of completeness of information about the test and to special assumptions. The familiar Spearman-Brown Formula is shown to be a special case of the general formulation of the problem of reliability. Reliability coefficients computed in various ways are presented for comparative purposes.

The reliability coefficient is of interest because it gives, by the simple assumption that a test score has two components, viz., true score and variable error, an (indirect) estimate of the random error variance present in an obtained test score variance. No matter how computed, the reliability coefficient is only an *estimate* of the percentage of the total variance that may be described as true variance, i.e., not due to error.

The usual methods of estimating test reliability are too well known to justify description here. These methods differ in such a fashion that no close estimate can be made of the results of one method, knowing the estimate obtained by another method. It is always desirable, even necessary, for the investigator to state how he made his estimate of the reliability coefficient.* The retest coefficient on the same form gives, in general, estimates that are too high, because of material remembered on the second application of the test. This memory factor cannot be eliminated by increasing the length of time between the two applications, because of variable growth in the function tested within the population of individuals. These difficulties are so serious that the method is rarely used.

Although the authors have made no actual count, it seems safe to say that most test technicians use the split-half method of estimating reliability. This method involves an arbitrary division of the test

*The critical reader will reflect that, in addition, the investigator must report the range, or better, the variance of the group tested. The present study is not concerned with that matter.

—151—

Figura 3. Portada del trabajo original de Kuder y Richardson publicado en la revista *Psychometrika* en 1937.

Paralelamente, en 1941, Hoyt [17] proporcionó un marco más general para evaluar la consistencia interna de un test basándose en el análisis de la varianza de las puntuaciones recogidas, obteniendo como resultados de situaciones particulares las fórmulas propuestas por Kuder y Richardson. El procedimiento desarrollado por Hoyt está basado en la técnica ANOVA. Este método utiliza las personas y las componentes (ítems) como fuentes de variabilidad sobre las puntuaciones observadas. Considerando estas dos fuentes y tratando la varianza de la puntuación error como la varianza residual, la estimación de la fiabilidad resulta ser:

$$\hat{\rho}_X = 1 - \frac{\hat{\sigma}_E^2}{\hat{\sigma}_X^2}$$

Diez años más tarde, basándose en el trabajo de Hoyt, Lee J. Cronbach (1916-2001) [18] (Fig. 4) propuso su famoso coeficiente alfa que actualmente es utilizado para evaluar la consistencia interna de un test.

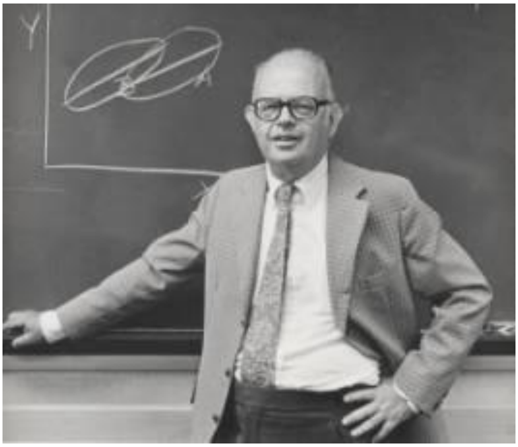


Figura 4. Lee J. Cronbach (1916-2001)

Cronbach realizó importantísimas contribuciones en psicometría. Nació en Fresno y estudió en su misma ciudad natal, aunque realizó un máster en la Universidad de Berkeley obteniendo en 1940 un doctorado en Psicología de la Educación en la Universidad de Chicago. Con su coeficiente Alfa, proporcionó una medida de la fiabilidad de un test con una sola administración del mismo, dejando en evidencia la necesidad de realizar mediciones repetidas para evaluar la consistencia interna de un test. En 1972 presentó un modelo estadístico que permitía identificar y cuantificar las fuentes de los errores de medida y que se conoció como la Teoría G o de generalización, que hoy en día sigue en desarrollo aplicándose sobre todo en educación, pero también en otras áreas como la clasificación de Servicios de Salud Mental [19].

Como ya hemos mencionado, la fórmula de Spearman-Brown requería que las componentes $X_1, \ldots, X_p$ fuesen paralelas. Sin embargo, en muchas situaciones empíricas dentro del área de investigación del comportamiento humano, es muy difícil construir medidas paralelas. En su lugar, puede ser que sea más factible tener componentes con una relación menos restrictiva entre ellas. Para este caso, Cronbach propuso el coeficiente alpha como el índice que permite evaluar la fiabilidad de X = $X_1 + \ldots + X_p$, que viene dado por la expresión:

$$\alpha = \frac{p}{p-1}\left[1 - \frac{\sum_{i=1}^{p} Var(X_i)}{Var(X)}\right]$$

Este coeficiente puede interpretarse como la correlación existente entre una escala y cualquier otra posible que contuviese el mismo número de ítems y que pudiera construirse a partir del universo hipotético de ítems que pueden medir el mismo constructo. Lo deseable para crear una escala fiable es que los ítems estén muy correlacionados entre sí siendo el nivel máximo de correlación el que se alcanza cuando el valor del coeficiente es igual a 1. Su valor puede variar entre 0 y 1, aunque es posible la existencia de valores negativos que indicarían que en el instrumento hay items que miden lo opuesto a lo que mide el resto de ítems.

En 1950, Harold Gulliksen (1903-1996) [20] aportó un resumen de lo publicado en la primera mitad del siglo XX, e introdujo la teoría y los procedimientos para la construcción de test hasta que en 1968 Frederic M. Lord (1912-2000) y Melvin R. Novick (1932-1986) [21] introdujeron la elegante axiomática de la *Teoría de la Puntuación Verdadera* o *Teoría Clásica de los Test* (TC) que sirvió de fundamento matemático para la creación de coeficientes de fiabilidad. Esta Teoría se basa en la idea de que la puntuación obtenida por un objeto de medida (un individuo, por ejemplo) en un test puede ser descompuesta en una puntuación verdadera no observable (T) propia de dicho objeto de medida y un cierto error (E), de manera que cualquier observación (X) puede escribirse como:

$$X = T + E$$

Las puntuaciones de un conjunto de test administrados a un individuo es la suma de una puntuación verdadera del individuo sobre el test y una puntuación error del individuo sobre el test. Para cada individuo, las puntuaciones verdaderas y errores pueden ser diferentes. Además, diferentes individuos tendrán en general diferentes puntuaciones verdaderas y errores a lo largo de los test. De la misma forma, cada test o instrumento de medida tendrán en general diferentes puntuaciones verdaderas y error a lo largo de la población de individuos.

Es lógico pensar que, si nuestro interés está en la puntuación verdadera T, ésta debe estar contenida en la puntuación observada X. Más específicamente, el objetivo de la fiabilidad debe ser analizar cómo es la relación entre las puntuaciones observadas y las verdaderas de un grupo de individuos en un test dado. Más concretamente, podemos definir el índice de fiabilidad como la correlación entre su puntuación verdadera T y su puntuación observada X, es decir, como el coeficiente de correlación ρ_{XT}.

El *índice de fiabilidad* es el cociente entre las desviaciones estándar de las puntuaciones verdaderas respecto a las observadas. Si todos los sujetos tuvieran la misma puntuación verdadera, entonces la desviación estándar sería 0 y también el índice de fiabilidad. A partir de este índice de correlación, la literatura psicométrica nos proporciona un coeficiente que es más fácil de obtener que el índice anterior, ya que en su cálculo se utilizan las varianzas en lugar de las desviaciones estándar.

En consecuencia, se define el *coeficiente de fiabilidad* ρ_X como el cuadrado del índice de fiabilidad, es decir, es el cociente entre la varianza de la puntuación verdadera y la varianza de la puntuación observada:

$$\rho_X = \frac{\sigma_V^2}{\sigma_X^2}$$

El hecho de que en su definición aparezca la variabilidad de la puntuación verdadera, cantidad imposible de obtener, ha originado que se hayan propuesto múltiples procedimientos para poder obtener estimaciones de este coeficiente.

4. COEFICIENTES UTILIZADOS EN LA ACTUALIDAD PARA EVALUAR FIABILIDAD

4.1. El Coeficiente de Correlación Intraclases

Inicialmente, este coeficiente fue propuesto por Ronald Aylmer Fisher (1890-1962) en 1941 [22] para obtener medidas simples de sujetos apareados (por ejemplo, hermanos gemelos), sin embargo, no fue utilizado como una medida de estabilidad entre dos administraciones de un test hasta 1951 por Ebel [23] y 1966 por Barko [24]. En un principio, en el trabajo realizado por Fisher, el ICC trató de dar una formulación especial al coeficiente de correlación de Pearson, basándose en un modelo de análisis de la varianza [25], [26]. Aunque realmente, fue Bartko quien amplió su estudio basándose en el trabajo de sus predecesores Hoyt [17], Gulliksen [20], Ebel [23] y Haggard [27].

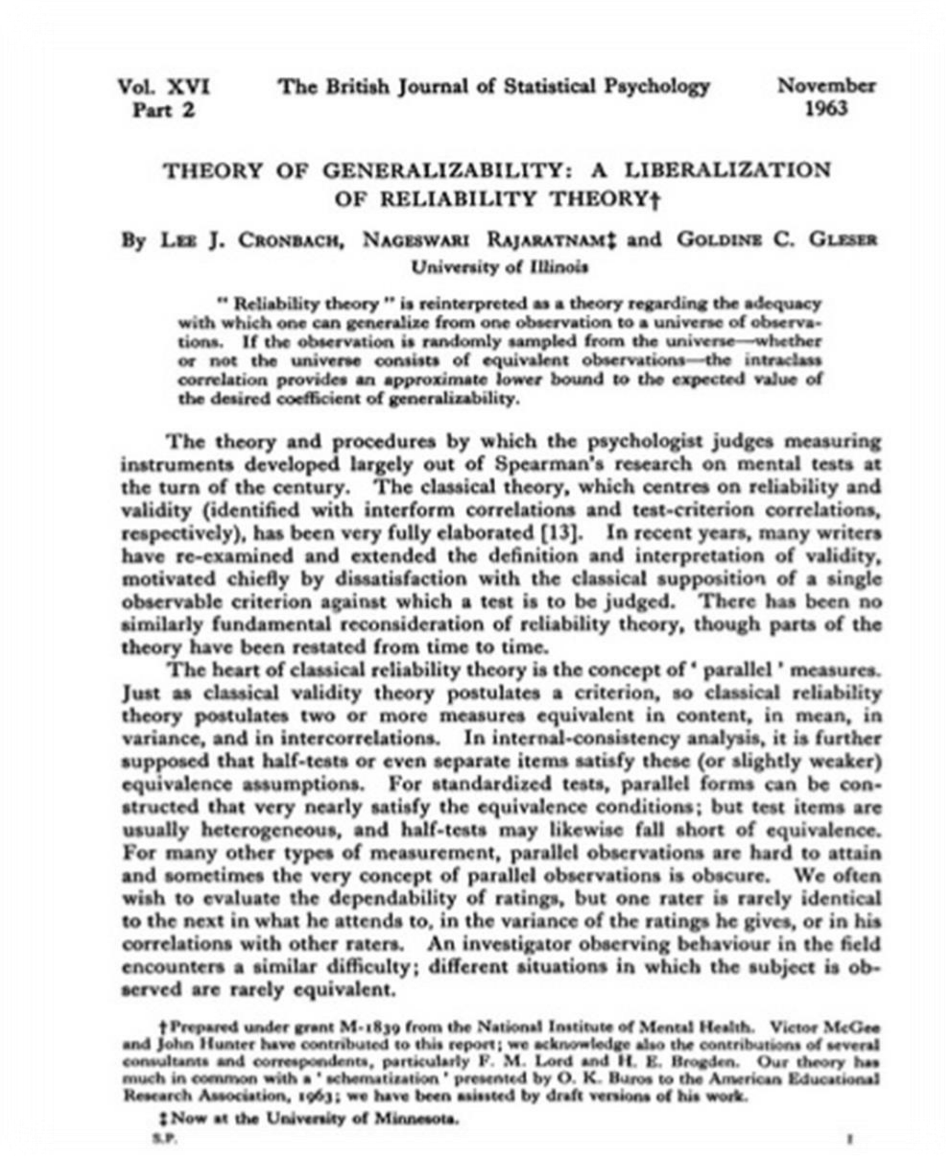
Sin embargo, no es hasta 1979 cuando Shrout y Fleiss [28] extienden el trabajo propuesto por Bartko analizando y desarrollando distintos tipos de ICC utilizando modelos de componentes de la varianza y partiendo de diferentes situaciones al realizar la medición de un objeto. Shrout y Fleiss sentaron las bases de su utilización como herramienta para evaluar la fiabilidad de observaciones atendiendo a diversas situaciones:

- cada individuo es evaluado por un conjunto diferente de *k* observadores aleatoriamente seleccionados de una población de observadores.
- cada individuo es evaluado por los mismos *k* evaluadores seleccionados aleatoriamente de una población de observadores.
- cada individuo es evaluado por *k* observadores fijos que son los únicos observadores que interesan en el estudio.

Posteriormente, inspirados en trabajos de Berk [29], Fagot [30] y Shavelson y Webb [31], en 1996 McGraw y Wong [32] ampliaron el trabajo realizado por Shrout y Fleiss utilizando también modelos de componentes de la varianza para analizar la variabilidad de las observaciones en un proceso de medida. Para el desarrollo de los coeficientes utilizan modelos ANOVA de uno o dos factores de efectos aleatorios o mixtos (según la situación de observación) y añaden en su trabajo la estimación de coeficientes para el caso en el que se desee conocer la fiabilidad de la media de *k* observaciones.

4.2. La Teoría de la Generabilidad

Aunque con menos popularidad que el ICC, la Teoría de la Generabilidad (TG) también ha sido propuesta para evaluar la fiabilidad de instrumentos. Esta teoría realmente tiene su origen en la década de los años 60, cuando Cronbach, Gleser y Rajaratnam, publican varios artículos ([33] (Fig. 5), [34], [35]) en los que la introducen como alternativa a las teorías que existían hasta entonces para medir fiabilidad. Su característica más relevante consistía en evaluar la influencia que producen en las mediciones las diferentes fuentes de error que pueden considerarse en un proceso de media.



Vol. XVI Part 2 The British Journal of Statistical Psychology November 1963

THEORY OF GENERALIZABILITY: A LIBERALIZATION OF RELIABILITY THEORY†

By Lee J. Cronbach, Nageswari Rajaratnam‡ and Goldine C. Gleser
University of Illinois

"Reliability theory" is reinterpreted as a theory regarding the adequacy with which one can generalize from one observation to a universe of observations. If the observation is randomly sampled from the universe—whether or not the universe consists of equivalent observations—the intraclass correlation provides an approximate lower bound to the expected value of the desired coefficient of generalizability.

The theory and procedures by which the psychologist judges measuring instruments developed largely out of Spearman's research on mental tests at the turn of the century. The classical theory, which centres on reliability and validity (identified with interform correlations and test-criterion correlations, respectively), has been very fully elaborated [13]. In recent years, many writers have re-examined and extended the definition and interpretation of validity, motivated chiefly by dissatisfaction with the classical supposition of a single observable criterion against which a test is to be judged. There has been no similarly fundamental reconsideration of reliability theory, though parts of the theory have been restated from time to time.

The heart of classical reliability theory is the concept of 'parallel' measures. Just as classical validity theory postulates a criterion, so classical reliability theory postulates two or more measures equivalent in content, in mean, in variance, and in intercorrelations. In internal-consistency analysis, it is further supposed that half-tests or even separate items satisfy these (or slightly weaker) equivalence assumptions. For standardized tests, parallel forms can be constructed that very nearly satisfy the equivalence conditions; but test items are usually heterogeneous, and half-tests may likewise fall short of equivalence. For many other types of measurement, parallel observations are hard to attain and sometimes the very concept of parallel observations is obscure. We often wish to evaluate the dependability of ratings, but one rater is rarely identical to the next in what he attends to, in the variance of the ratings he gives, or in his correlations with other raters. An investigator observing behaviour in the field encounters a similar difficulty; different situations in which the subject is observed are rarely equivalent.

†Prepared under grant M-1839 from the National Institute of Mental Health. Victor McGee and John Hunter have contributed to this report; we acknowledge also the contributions of several consultants and correspondents, particularly F. M. Lord and H. E. Brogden. Our theory has much in common with a 'schematization' presented by O. K. Buros to the American Educational Research Association, 1963; we have been asisted by draft versions of his work.

‡Now at the University of Minnesota.

S.P. 1

Figura 5. Portada del trabajo original de Cronbach, Rajaratnam y Gleser publicado en la revista *The British Journal of Statistical Psychology* en 1963.

Posteriormente, hacia 1972, Cronbach, Gleser, Nanda y Rajaratnam [36] elaboran un trabajo titulado *The Dependability of Behavioral Measurements*, donde exponen las ideas fundamentales de esta Teoría. Aunque tiene elementos en común con la TC y es comparada en numerosas ocasiones con ella, la TG extiende y liberaliza las nociones tradicionales de fiabilidad [37]. Por un lado, la TG es menos restrictiva que la TC, ya que no necesita supuestos de normalidad, la única condición que impone es la aleatoriedad de los objetos de medida y las condiciones de medida. Por otra parte, mientras que la TC tiene en cuenta las distintas fuentes de variación que afectan al proceso de medida independientemente unas de otras, la TG es capaz de estimar distintas fuentes de error simultáneas, así como las posibles interacciones que puedan producirse entre ellas [38].

Quizá el aspecto y el hándicap más importante de la TG sea la magnitud de su estructura conceptual y la complejidad de cálculos. Es fundamental conocer todos los conceptos que engloba esta Teoría antes de proceder al desarrollo de cualquier diseño que pueda plantearse en ella. Los diferentes modelos y diseños univariantes o multivariantes que pueden desarrollarse para calcular coeficientes de fiabilidad utilizan una estructura de cálculo estadístico complejo basado en el estudio de la varianzas y covarianzas entre los factores que afectan al proceso de medida y sus interacciones. El peso que estas varianzas y covarianzas tengan influye en los diversos coeficientes de fiabilidad que se proponen en ella.

4.3. El coeficiente kappa de Cohen

Finalmente, no podemos hacer un recorrido histórico de la evaluación de la fiabilidad de mediciones sin mencionar el coeficiente kappa de Jacob Cohen (1923-1998) (Figura 6), coeficiente propuesto en 1960 para evaluar un aspecto concreto de fiabilidad: el acuerdo entre dos observadores cuando la información recogida es de tipo cualitativo. Cohen propuso dos coeficientes, el coeficiente kappa simple y kappa ponderado [39] [40] para valorar la fiabilidad de mediciones realizadas por dos observadores que miden elementos de una misma muestra y que clasifican a éstos en función de la presencia o ausencia de una determinada característica o bien en función de una serie de características que son mutuamente excluyentes. Desde su introducción, este coeficiente ha sido ampliamente utilizado en diversas áreas médicas donde ha sido necesario evaluar el acuerdo entre dos procedimientos de valoración [41]. La información recogida por ambos observadores se sintetiza en una tabla de doble entrada donde las distintas categorías de clasificación quedan representadas por filas y columnas para cada uno de los observadores implicados. Por tanto, la diagonal principal de estas tablas contiene el número de veces que ambos observadores han clasificado a un individuo exactamente de la misma forma. Para construir el coeficiente, se definen el acuerdo observado y el acuerdo debido al azar, quedando el coeficiente representado como el cociente entre el acuerdo observado eliminando la parte que es debida al azar y el máximo acuerdo posible sin intervención del azar, obteniéndose una puntuación comprendida entre 0 (acuerdo nulo) y 1 (máximo acuerdo posible).

Figura 6. Jacob Cohen (1923-1998)

Fleiss y Cohen [42] mostraron que el valor del coeficiente kappa ponderado es idéntica al ICC bajo determinadas hipótesis.

El índice o coeficiente kappa posee una serie de propiedades [43] que han favorecido la proliferación de su uso, sin embargo, presenta también serias dificultades como, por ejemplo, bajos valores de acuerdo cuando la prevalencia del fenómeno analizado es demasiado baja o alta. A pesar de la popularidad del coeficiente kappa, y dadas las paradojas que presenta, algunos autores como Martín y Femia [44] o Kupper y Hafner [45], entre otros, han propuesto otros coeficientes alternativos. El primero de ellos, denominado coeficiente Delta es una medida de la proporción de acuerdos no debida al azar y que no presenta las limitaciones del índice kappa cuando la prevalencia es muy baja o alta. Por otra parte, el coeficiente propuesto por Kupper y Hafner puede utilizarse cuando las categorías de clasificación de individuos no son excluyentes entre sí.

No queremos terminar este bosquejo histórico sin apuntar que muchos de los conceptos repasados aquí deben su introducción en la psicometría española, o al menos eso pensamos, a dos autores: Mariano Yela (1921-1994) y Jesús Amón (fallecido en 1998). De hecho, el actual departamento de Metodología de la Universidad Complutense de Madrid, es el resultado de la fusión de dos departamentos que nacieron y se desarrollaron de manera independiente: el de Psicología Matemática, creado y dirigido por Amón y el de Psicología Experimental, creado y dirigido por Yela [46]. Estudiar la labor desarrollada por ambos científicos es algo que trataremos de abordar en otro momento.

5. DISCUSIÓN

A lo largo de los años, la necesidad de medir constructos subjetivos ha dado lugar a la creación y desarrollo de diferentes instrumentos de medida. La complejidad de la medición del constructo, las diferentes situaciones en las que éste podía ser medido y, por tanto, los instrumentos aplicados, y la necesidad de garantizar la calidad del instrumento, ha favorecido la aparición de numerosas formas de aplicar un test y, en consecuencia, numerosos índices o coeficientes para evaluar su fiabilidad.

Muchos han sido los índices y formas de administrar un test propuesto a lo largo de la historia hasta llegar a la definición formal de coeficiente de fiabilidad. Basado en esta definición se construye el Coeficiente de Correlación Intraclases y su aplicación es mundialmente aceptada. En la actualidad, casi la totalidad de los trabajos publicados en los que se evalúa la fiabilidad de instrumentos suelen centrar su análisis en el cálculo del ICC cuando las variables son continuas y en el coeficiente kappa cuando las variables son categóricas, a pesar de las limitaciones que ambos coeficientes presentan. La sencillez en su compresión y cálculo los ha instaurado como coeficientes de fiabilidad internacionales. No obstante, gracias a la aparición de los ordenadores y la potencia de cálculo que presentan, se observa en los últimos años una mayor aplicación de técnicas más complejas, como la Teoría de la Generabilidad, que las utilizadas hasta el momento.

BIBLIOGRAFÍA

[1] ALLEN MJ, YEN WM. *Introduction to Measurement Theory*. 1979. Waveland Press. USA.

[2] STEVENS SS. *On the Theory of scales of Measurement*. 1946. Science 103, 677-680.

[3] BRIDGMAN PW. *The logic of modern physics*. 1928. Macmillan, New York.

[4] SILVA AYÇAGUER LC. *Cultura estadística e investigación científica en el campo de la salud: una mirada crítica*. 1997. Editorial Díaz de Santos. Madrid, España.

[5] BUSH AB. "Validity, Reliability and Other Key Concepts in Outcome Assessment and Services Research". En: *Outcome Measurement in Psychiatry: A Critical Review*. Ed: IsHak WW, Burt T, Sederer LlI. American Psychiatric Publishing, Washington DC.

[6] ALLEN M, YEN W. *Introduction to Measurement Theory*. 2002. Waveland Press.

[7] JONES LV, THISSEN D. "A History and Overview of Psychometrics". En: *Handbook of Statistics*, vol 26. 2007. Ed: Elsevier.

[8] CAPARRÓS A. *Historia de la Psicología*. 1986. Ediciones CEAC. Barcelona, España.

[9] PASCUAL FAURA M. "Los modelos factoriales de la estructura de la inteligencia técnica en las décadas de los años 1920 y 1930: su aplicación a la selección de personal y en orientación profesional". 2004. En: *Historia de la Probabilidad y la Estadística (II)*. Delta Publicaciones, Madrid, España.

[10] ALMENARA BARRIOS A, SILVA AYÇAGUER LC, BENAVIDES RODRÍGUEZ A, GARCÍA ORTEGA C, GONZÁLEZ CABALLERO JL. Historia de la Bioestadística: la Génesis, la Normalidad y la Crisis. Ed Quorum, España.

[11] FURR RM, BACHARACH VR. *Psychometrics: An introduction*. 2008. Sage Publications, USA.

[12] LAWRENCE I-KUEI LIN. *A Concordance Correlation Coefficient to Evaluate Reproducibility*. 1989. Biometrics 45, 255-268.

[13] SPEARMAN C. "Correlation calculated with faulty data". 1910. *Bristish Journal of Psychology* 3, 271-295.

[14] BROWN W. “Some experimental results in the correlation of mental abilities”. 1910. *Bristish Journal of Psychology* 3, 296-322.
[15] KUDER GF., RICHARDSON MW. “The theory of the estimation of test reliability”. 1937. *Psychometrika* 2(3), 151-160.
[16] MENESES J, BARRIOS M, BONILLO A, COSCULLUELA A, LOZANO LM, TURBANY J, VALERO S. *Psicometría*. 2014. Editorial UOC, Barcelona
[17] HOYT, C. “Test reliability estimated by analysis of variance”. 1941. *Psychometrika* 6, 153-160.
[18] CRONBACH LJ. “Coefficient alpha and the internal Structure of Tests.” 1951. *Psychometrika* 16(3), 297-334.
[19] SALVADOR-CARULLA L, GONZÁLEZ-CABALLERO JL, RUIZ M, SEYRLEHNER D, ROMÁ-FERRI MT, POOLE M, LAGARES C, FERNANDEZ A, ROMERO C. for the eDESDELTC Group ÜSABILITY OF THE eDESDE-LTC INSTRUMENT: Feasibility, Consistency, Reliability and Validity. 2011. eDESDE-LTC Project: Word Package WP4 Deliverables D13 and D15. Project Ref. 2007/116: Executive Agency for Health and Consumers (EAHC).", Edits: PSICOST and Telnet. Disponible en: http://www.edesdeproject.eu.
[20] GULLIKSEN HO. *Theory of Mental Tests*. 1950. Wiley, New York. Reprint in 1987 by Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, NJ.
[21] LORD FM, NOVICK MR. *Statistical Theories of Mental Test Scores*. 1968. Addison-Wesley, Reading, MA.
[22] FISHER RA. *Statistical Methods for Research Workers*. 1941. 8th ed. Edinburgh: Oliver and Boyd.
[23] EBEL RL. “Estimation of the reliability of ratings”. 1951. *Psycometrika* 16, 407-424.
[24] BARTKO J. “The Intraclass Correlation Coefficient as a Measure of Reliability”. 1966. *Psycological Reports*, 19, 3-11.
[25] FERNÁNDEZ P, DÍAZ P. *La fiabilidad de las mediciones clínicas: el análisis de concordancia para variables numéricas*. 2004. Disponible en: http://www.fisterra.com/mbe/investiga/conc-numerica/conc-numerica.pdf
[26] BRAVO G, POTVIN L. “Estimating the reliability of continuous measures with Cronbach's alpha or the intraclass correlation coefficient: toward the integration of two traditions”. 1991. *J Clin Epidemiol* 44(4-5), 381-90.
[27] HAGGARD EA. *Intraclass correlation and the analysis of variance*. 1958. Dryden Press, New York.
[28] SHROUT P, FLEISS J. “Intraclass Correlations: Uses in Assessing Rater Reliability”. 1979. *Psychological Bulletin* 86(2), 420-428.
[29] BERK RA. “Generalizability of behavioral observations: A clarification of interobserver agreement and interobserver reliability”. 1979. *American Journal of Mental Deficiency* 83, 460-472.
[30] FAGOT RF. “A generalized family of coefficients of relational agreement for numerical scales”. 1993. *Psycometrika* 58, 357-370.
[31] SHAVELSON RJ, WEBB NM. *Generalizability Theory*. 1991. CA: Sage, Newbury Park.
[32] MCGRAW K, WONG SP. “Forming Inferences About Some Intraclass Correlation Coefficients”. 1996. *Psychological Methods* 1(1), 30-46.
[33] CRONBACH, L.J., RAJARATNAM, N., GLESER, G.C. “Theory of generalizability: A liberalization of reliability theory”. 1963. *British Journal of Statistical Psychology* 16, 137-163.
[34] GLESER, G.C., CRONBACH, L.J., RAJARATNAM, N. “Generalizability of scores influenced by multiple sources of variance”. 1965. *Psychometrika* 30, 395-418.

[35] RAJARATNAM, N., CRONBACH, L.J., GLESER, G.C. "Generalizability of stratified-parallel tests". 1965. *Psychometrica* 30, 39-56.
[36] CRONBACH, L.J., GLESER, G.C., NANDA, H., RAJARATNAM, N. *The dependability of behavioral measurements: Theory of generalizability for scores and profiles*. 1972. Wiley, New York.
[37] SHAVELSON, R.J., WEBB, N.M., ROWLEY, G.L. "Generalizability Theory". 1989. *American Psychologist* 44(6), 922-932.
[38] BRENNAN, R.L. *Generalizability Theory*. 2001. Springer-Verlag, New York.
[39] COHEN J. *A coefficient of agreement for nominal scales*. 1960. Educational and Psychological Measurement 20, 37-46.
[40] COHEN, J. "Weighted kappa: Nominal scale agreement with provision for scaled disagreement or partial credit". 1968. *Psychological Bulletin* 70, 213-220.
[41] RIGBY, A.S. "Statistical methods in epidemiology. v. Towards an understanding of the kappa coefficient". 2000. *Disability and Rehabilitation* 22(8), 339-344.
[42] FLEISS, J.L. Y COHEN, J. "The equivalence of weighted kappa and the intraclass correlation coefficient as measures of reliability". 1973. *Educational and Psychological measurement*, 33, 613-619
[43] FEINSTEIN, A. *Principles of Medical Statistics*. 2002. Chapman and Hall/CRC Press.
[44] MARTÍN ANDRÉS, A., FEMIA MARZO, P. "Delta: a new measure of agreement between two raters". 2004. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology* 57(1), 1-19.
[45] KUPPER, L., HAFNER, K. "On Assessing Interrater Agreement for Multiple Attribute Responses". 1989. *Biometrics* 45, 957-967.
[46] JÁÑEZ L., RÁBADE S. "Al Dr. Jesús Amón, In Memoriam". 2000. *Psicothema* 12, Suplem.2, 8-11.

CAPÍTULO 2

EL JUEGO DEL HER: UN JUEGO DE ESTRATEGIA TEMPRANO. SOLUCIONES DE P.R. MONTMORT, N. BERNOULLI Y J. TREMBLEY

JOSE ANTONIO CAMÚÑEZ RUIZ
JESÚS BASULTO SANTOS
MARÍA DOLORES PÉREZ HIDALGO
Universidad de Sevilla

1. INTRODUCCIÓN

El juego del *Her* para dos jugadores *A* y *B* consiste en lo siguiente: El jugador *B* es el que reparte (previamente se ha sorteado quién lo hace) usando una baraja de 52 cartas, con 4 palos, 13 cartas por palo, siendo la más alta la del rey, que tiene el valor 13. El jugador *B* entrega una carta elegida al azar al jugador *A* y, después, otra para sí mismo. Si *A* no está contento con su carta puede obligar a *B* a intercambiarla con la suya, a menos que *B* tenga un rey (un 13). Si *B* no está contento con la suya, la extraída inicialmente o la que le ha obligado a coger *A*, entonces puede cambiarla por una de las restantes 50 cartas que quedan en la baraja, extraída al azar. Terminado este proceso ambos jugadores muestran sus cartas, ganando el juego el que tenga la carta más alta. En caso de empate, gana el jugador *B*. Se pide la probabilidad de cada jugador de ganar el juego. Montmort llama a los dos jugadores Pedro y Pablo, donde el primero es el que reparte y el segundo, Pablo, es el primero en tomar una decisión.

El juego es descrito para cuatro jugadores y usado como problema para el lector por Montmort (1708, pp. 185-187). La descripción es repetida para tres jugadores por Montmort (1713, pp. 278-279) y de nuevo planteado como un problema. Es discutido y resuelto para dos jugadores en la correspondencia con Nicholas Bernoulli.

La correspondencia comienza en 1710, y la última carta publicada es de Montmort a Bernoulli, fechada el 15 de noviembre de 1713. Ver Montmort (1713, pp. 321, 334, 338-340, 348-349, 361-362, 376-378, 400, 403-406, 409-412, 413). En 1804, Jean Trembley publica su propia solución. Analizar las propuestas de solución tempranas aportadas por estos tres autores es el objetivo de este trabajo. Nos resulta curioso el hecho, y por eso lo citamos, que uno de los grandes de la inferencia estadística del siglo XX, R. A. Fisher, sea también uno de los que en la etapa moderna estudia este juego de estrategia (Fisher, 1934).

2. P. R. MONTMORT, N. BERNOULLI Y EL JUEGO DEL *HER*

Vemos que el juego consta de tres pasos. El primero es la extracción de dos cartas al azar, y el resultado en este paso sólo depende del propio azar. El segundo paso depende de la decisión de *A* en cuanto a usar o no su derecho a intercambiar cartas con *B* (si se produce la decisión de intercambio por parte de *A* entonces, en ese instante, ambos jugadores conocen la carta de su rival). El tercero depende de la decisión de *B* sobre si usar o no su derecho a intercambiar su carta con una de la baraja. Ya que la probabilidad de cada jugador de ganar depende no sólo de la suerte sino también de las decisiones tomadas por cada uno de ellos, el juego es conocido como un "juego de estrategia" en la terminología de hoy. En la primera carta en la que Montmort menciona este juego escribe que "Las dificultades de este problema son de una naturaleza singular.".

Parece claro e intuitivo que una buena estrategia consiste en cambiar cartas de bajo valor y retener cartas de alto valor y, además, que la línea de demarcación entre bajo y alto debe estar alrededor del 7. Sin tener discusión en este aspecto, Montmort y Bernoulli coinciden en la opinión de que *A* siempre cambiará cartas de valores menores que 7 y retendrá cartas de valores mayores que 7; su decisión con respecto a 7 dependerá de la estrategia que elija. Además, ellos coinciden en que una regla similar se cumple para *B* pero con 7 reemplazado por 8. El efecto de estas reglas sobre la probabilidad de ganar de cada jugador se refleja en los cálculos de los que Montmort nos ofrece sólo los resultados de los mismos como un apéndice de su última carta "para evitar al lector la molestia de hacerlo por sí mismo".

La correspondencia más antigua existente entre Montmort y un miembro de la familia Bernoulli es una carta del primero a Johann Bernoulli, de fecha 27 de febrero de 1703, en relación a un trabajo sobre cálculo que este último había presentado a la Academia Real de París. Ambos correspondieron de manera esporádica durante los siguientes años. El 29 de abril de 1709 Montmort envía a Johann una copia de la primera edición de su libro, que acababa de publicarse. Bernoulli corresponde con un regalo, una copia de la tesis doctoral de su sobrino Nicolás (en el cual introduce aplicaciones de la probabilidad). Una vez que Johann ha estudiado el texto de Montmort le envía una carta de fecha 17 de marzo de 1710, con una detallada colección de comentarios sobre el propio texto. En la misma carta se incluye otro conjunto de comentarios sobre el libro de Montmort redactados por el sobrino Nicolás. (Montmort (1713), pp. 283-303):

MONSIEUR,

Votre très humble & très
obéiſſant Serviteur,
BERNOULLY.

P. S. mon Neveu qui vous fait ſes Complimens réciproques, vient de me donner ſes Remarques (que je vous envoye ici auſſi) ſur votre Livre que je lui avois prêté : je n'ai pas encore eu le temps de les examiner.

Figura 1
Final de la carta de Johann Bernoulli anunciando la inclusión de comentarios de su sobrino Nicolás.

De esta forma comienza una correspondencia entre Montmort y Nicolás Bernoulli relacionada con los problemas de probabilidad abordados en el *Essay* de Montmort. Éste incluye gran parte de dicha correspondencia en la segunda edición (1713), como Parte V de la misma. Después de 1713 se mantuvo esa correspondencia entre ambos y además parece que fue abundante, pero, que se sepa, aún no se publicado el contenido completo de la misma.

Uno de los asuntos fundamentales tratados en la correspondencia publicada por Montmort (1713) es el de la resolución del juego del *Her*. Sólo consideran un juego con dos jugadores. Inicialmente, ambos coinciden en la solución. Sin embargo, dos de los amigos de Montmort sostuvieron que la misma era incorrecta. Estos eran un caballero inglés llamado Waldegrave y un abad cuya abadía sólo estaba a una legua y media (aproximadamente 5,8 kilómetros) del Chateau de Montmort (Montmort (1713), página 338). Montmort identificó Waldegrave como el hermano del Señor Waldegrave que se casó con una hija natural del rey Jacobo II de Inglaterra (todo esto y más detalles de tipo personal sobre el propio Waldegrave los incluye Montmort en su carta a Bernoulli).

A la hora de analizar este problema, a nivel real (y no de “libro de texto”), como lo intentaban los personajes implicados en la correspondencia (Montmort, Bernoulli, Waldegrave y el abad d'Orbais), surge la posibilidad de que queden factores fuera del análisis y, por tanto, de que no haya coincidencia en las soluciones aportadas por cada uno de ellos. Un factor sería la distribución de las cartas entre Pedro y Pablo, y sus probabilidades asociadas. Un segundo factor es el de considerar algún método de aleatorización para llegar a la estrategia mixta que prescriba cuándo los jugadores deben mantenerse con su carta y cuándo deben cambiar. El dispositivo de aleatorización comentado por Montmort en el *Essay* es el de extracción de fichas de una bolsa que contiene un determinado número de color blanco y otro, igual o no al anterior, de color negro. Y un tercero, se nos ocurre, es el de la actitud personal de los jugadores: podría ocurrir que Pablo, por ejemplo, fuese un jugador tímido, miedoso, y no siguiera una estrategia matemáticamente óptima, o que por contra fuese un jugador experimentado que trata, mediante algún tipo de engaño, de empujar a Pedro a tomar una decisión no óptima, al estilo de lo que suele ocurrir en el póquer, por ejemplo. Hasta que los personajes se ponen de acuerdo en los factores a considerar, transcurren cruces de correspondencias que llevan implícitas desiguales soluciones, y por tanto, discusiones. También, el paso del tiempo en el discurrir de la propia correspondencia hace que cada uno de ellos interiorice y analice con más sosiego y aprendizaje. Sirvan de aviso estos comentarios para comprender mejor lo que contamos a continuación.

La primera carta de Nicolás Bernoulli a Montmort, de 26 de febrero de 1711, no hace referencia al juego en cuestión. Una nota en la respuesta de Montmort a Nicolás Bernoulli, de fecha 10 de abril de 1711 (Montmort (1713), páginas 315-323), es la que inicia la discusión sobre este problema:

J'ai entrepris depuis quelque temps d'achever la ſolution des Problêmes que je propoſe à la fin de mon Livre ; je trouve qu'au Her , lorſqu'il ne reſte plus que deux Joueurs Pierre & Paul , l'avantage de Paul eſt plus grand que $\frac{1}{85}$, & moindre que $\frac{1}{84}$. Ce Problême a des difficultés d'une nature ſinguliere J'ai commencé auſſi le Pro-

Empecé hace algún tiempo a trabajar en la solución de los problemas que propongo al final de mi libro; he encontrado que en el Her, cuando sólo hay dos jugadores, Pedro y Pablo, la ventaja de Pablo es mayor que $\frac{1}{85}$ *, y menor que* $\frac{1}{84}$.

En una posdata a esta carta Montmort informa que va a haber una segunda edición de su libro y, para la misma, les pedirá permiso tanto a Nicolás como a su tío, para incluir en la misma "vos belles Lettres":

Monſieur, à rendre publique celle que avés trouvée. Comme il ne reſte preſque plus d'exemplaires de mon Livre, je crois que j'en pourrai donner bientôt une nouvelle édition. Lorſque j'y ſerai déterminé, je vous demanderai la permiſſion, & à M. votre Oncle, d'y inſerer vos belles Lettres qui en feront le principal ornement. On me con-

Probablemente, esta petición motivó a Nicolás para seguir su correspondencia con Montmort y, así, enriquecerla con buen material. Éste responde a Montmort con una larga carta, fechada el 10 de noviembre 1711 (Montmort (1713), páginas 323-337). En ésta, él anuncia, entre otras muchas cosas, que también ha resuelto el problema del Her para el caso de dos jugadores (Montmort (1713), p. 334):

También he resuelto el problema sobre el Her para el caso más simple; esto es lo que encontré. Si suponemos que cada jugador observa la conducta que le es más ventajosa, Pablo sólo debe mantener la carta si es más alta que un siete y Pedro una que sea más alta que un ocho, y nos encontramos que en este supuesto la suerte de Pedro será a la de Pablo como 2697 es 2828. Si se supone que Pablo también se mantiene en el siete, entonces Pedro debe mantenerse en el ocho, y sus suertes seguirán siendo como 2697 a 2828. Sin embargo, es más ventajoso para él no mantenerse en el siete que mantenerse, lo cual es un enigma que os dejo para desarrollar.

Montmort, en su respuesta de 1 de marzo de 1712 (Montmort (1713), páginas 337-347), alaba la carta anterior de Bernoulli. Él se queja de que, al haber estado en París, no había tenido tiempo y sosiego para pensar por su cuenta y, como consecuencia, el objeto principal de su carta era informarle sobre el progreso realizado por sus dos amigos, el abad d'Orbais y Waldegrave, sobre un problema propuesto por Bernoulli, y sobre el problema del Her. Sobre este último, Montmort informa que "osan, sin embargo, y no se someten a sus decisiones" (Montmort (1713), página 338). Sin embargo, como dice en un pasaje que es clave para entender la próxima controversia, el abad d'Orbais también previamente estaba en desacuerdo con Montmort:

Cuando trabajé en el Her hace unos años, le mostré al Sr. Abad de Monsoury lo que había encontrado, pero ni mis cálculos ni mis argumentos pudieron convencerlo. Él siempre ha sostenido que era imposible determinar las suertes de Pedro y Pablo, porque no hemos podido determinar en qué carta Pedro debe mantenerse, y viceversa, lo que resulta en un círculo, y hace en su opinión que la solución sea imposible. Añadió una cantidad de razonamientos sutiles que me hicieron dudar un poco sobre si yo había alcanzado la verdad. Ahí es donde yo me encontraba cuando le propuse que examine este problema; mi objetivo era asegurarme la bondad de mi solución, sin tener la molestia de recordar mis ideas sobre éste que estaban completamente borradas.

Montmort, entonces, reclama que la solución de Nicolás confirma lo que él había encontrado, y le pide respuesta a Waldegrave, quien había hecho objeciones a la solución del mismo (todo esto se explica en las páginas 339-340 del *Essay*).

Según Waldegrave y el abad d'Orbais, no es cierto que Pablo debe mantenerse sólo en el ocho y Pedro en el nueve. Más bien, que Pablo debería ser indiferente sobre si mantenerse en el siete o cambiar, y que Pedro debería ser indiferente sobre si mantenerse en el ocho o cambiar. Waldegrave escribió lo siguiente a Montmort (Montmort (1713), p. 339):

Sostenemos que es indiferente a Pablo cambiar o mantenerse con un siete, y a Pedro cambiar o mantenerse con un ocho. Para probar esto, primero debo explicar su suerte en todos los casos. La de Pablo teniendo un siete, es $\frac{780}{50\times 51}$ *cuando cambia, y cuando él se aferra a que es su suerte es* $\frac{720}{50\times 51}$ *si Pedro se mantiene en el ocho, y* $\frac{816}{50\times 51}$ *si Pedro cambia en el ocho. La suerte de Pedro teniendo un ocho es* $\frac{150}{23\times 50}$ *si se mantiene en él, y* $\frac{210}{23\times 50}$ *si cambia en el caso de que Pablo no se mantenga en el siete; y* $\frac{350}{27\times 50}$ *si se mantiene en él, y* $\frac{314}{27\times 50}$ *al cambiarlo en el caso de que Pablo se mantenga en el siete, así sucesivamente. Las suertes de Pablo* $\frac{780 \text{ o } 720 \text{ o } 816}{50\times 51}$*, las de Pedro* $\frac{150 \text{ o } 210}{23\times 50}$ *o* $\frac{350 \text{ o } 314}{27\times 50}$.

De acuerdo a los números que obtiene, Waldegrave observa que "al estar 720 más por debajo de 780 que lo que 816 está por encima, parece que Pablo debe tener una razón para cambiar con 7" (Montmort (1713), página 339). Las diferencias, 780 a 720 y 816 a 780, están en la relación de 60:36, o de 5:3. Estos números, 3 y 5, después los usará Waldegrave para construir su solución definitiva.

En el resto de su argumento, habla Waldegrave de un "peso" ("poid", en francés) en lugar de usar la palabra razón o ratio. Llama A al peso que lleva a Pablo a cambiar, y B al peso que lleva a Pedro también a cambiar. Y argumenta que los mismos pesos llevan a Pablo y Pedro a ambas estrategias. A lleva a Pablo a cambiar con 7 y, como consecuencia, también lleva a Pedro para cambiar su 8; pero lo que lleva a Pedro a cambiar su 8 debe llevar a Pablo a quedarse con 7. Por lo tanto, A lleva a Pablo tanto a cambiar con un 7 como a quedarse con él. Lo mismo ocurre con Pedro. Por lo tanto, "es falso que Pablo no deba quedarse más que en el ocho 8, y Pedro en el 9", que era la solución reclamada por Bernoulli. La palabra "probabilidad" aparece sólo una vez en esta discusión, en la conclusión del extracto de la carta de Waldegrave a Montmort, donde el primero escribe (Montmort (1713), p. 340):

Al parecer, el señor Bernoulli se contentó con observar las fracciones que expresan las diferentes suertes de Pedro y Pablo, sin prestar atención a la probabilidad de lo que el otro va a hacer.

Montmort deja aquí la discusión, sin más comentario.

Al recibir la carta de Montmort, Bernoulli se muestra de acuerdo con estas cantidades, diciendo que "las suertes que encontraron para Pedro y Pablo están muy bien" (Montmort (1713), página 348). Y, sin embargo, cuando Bernoulli propone su solución, y cuando finalmente Montmort publica una tabla de probabilidades, como ya se ha dicho, como un apéndice del *Essay* (Montmort (1713), página 413), los números son diferentes. Ninguno de los componentes de este debate explica sus cálculos. La diferencia en las probabilidades es que las de Waldegrave son condicionadas a que Pablo tiene un siete en la mano y las probabilidades Bernoulli-Montmort son las probabilidades marginales de todas las cartas que Pablo pueda tener.

En una carta de fecha 2 de junio de 1712, Bernoulli responde al argumento de Waldegrave acusándolo de cometer una falacia. Argumenta que si suponemos que la estrategia (o peso) A lleva a Pablo a cambiar con un siete, y así lleva a Pedro a cambiar con un ocho (si Pedro sabe que Pablo cambia con un siete), entonces también lleva a Pablo a quedarse en el siete. Por lo tanto, el peso A tanto lleva a Pablo a cambiar con un siete como a quedarse con él. Su conclusión es que (Montmort (1713), p. 348):

...estamos suponiendo dos cosas contradictorias al mismo tiempo; es decir, que Pablo sabe, y hace caso omiso a la vez, lo que Pedro va a hacer, y Pedro lo hará respecto de Pablo.

En esa carta de 2 de junio de 1712 (Montmort (1713), pág. 349), Bernoulli explica que si nos mantenemos aquí respecto a lo que Pablo y Pedro saben acerca de la intención del otro, eso nos lleva a razonar en círculo, lo que demuestra que el argumento de Waldegrave no puede demostrar nada. Este argumento es peculiar, y parece sugerir que Bernoulli no entiende el punto de vista de Waldegrave. O bien podría ser simplemente una mala interpretación de su argumento, por expresarse en términos de peso en lugar de en términos de probabilidad. La palabra "peso" o "poid" en francés se presta en este caso a una mala interpretación. Por otra parte, Bernoulli admite haber escrito su carta a toda prisa, cuando se preparaba para un largo viaje a los Países Bajos e Inglaterra. Como resultado de este viaje, algunas cartas posteriores se retrasan, y los argumentos que contienen no siguen el orden cronológico de cuando se escribieron las mismas.

Una carta de Montmort a Bernoulli, de fecha 5 de septiembre de 1712 (Montmort (1713), páginas 361-370), anuncia que Waldegrave y el abad d'Orbais han leído la respuesta de Bernoulli en la que los acusa de haber caído en una falacia. Montmort incluye una nota del abad d'Orbais en el que afirma que Waldegrave ha escrito una respuesta hermosa y precisa a la objeción de Bernoulli; la refutación, sin embargo, no está incluida. En esta nota, el abad d'Orbais también pide a Montmort que tome partido en esta disputa entre ellos. Esto sugiere que, incluso aunque Montmort agradeció a Bernoulli su solución, que, según él, estaba de acuerdo con la suya, aún no ha tenía claro si realmente Bernoulli había resuelto el problema.

La siguiente carta sobre el *Her* es de Bernoulli a Montmort, de fecha 30 de diciembre 1712 (Montmort (1713), páginas 375-394). La misma contiene una discusión de tres páginas sobre el juego en cuestión (Bernoulli menciona que acaba de recibir la carta del 2 de junio, ya que fue enviada desde Suiza a Holanda, y luego a Inglaterra, y finalmente devuelta a Suiza). Bernoulli insiste en que, a pesar de los argumentos de Waldegrave, Pablo no hace sino seguir la máxima de quedarse con el siete, como la de cambiarlo. Bernoulli luego dice (Montmort (1713), página 376):

Si fuera imposible decidir este problema, Pablo tiene un siete y no sabría qué hacer; y para librarse de esa decisión, se sometería a la casualidad, por ejemplo, pondría en una bolsa un número igual de fichas blancas y fichas negras, con la intención de mantenerse en siete si se extrae una blanca, y cambiar con un siete si se extrae una negra; porque si pone un número desigual que se lleve más de una de las partes que de la otra, estaría en contra de la hipótesis. Pedro con un ocho haría lo mismo para ver si debe cambiar o no.

En este comentario se presenta con claridad la idea de chance por "la vía de las fichas", expresión que usarán con frecuencia los escritores sobre probabilidad del siglo XVIII. Lo que aquí dice Bernoulli parece confirmar que, al principio, cuando acusó Waldegrave de cometer una falacia, no interpretó los pesos de Waldegrave como probabilidades. Sin embargo, sugiere que la única asignación de probabilidad compatible con el supuesto estado de la ignorancia de los jugadores es que cada jugador elige una estrategia con una probabilidad de $\frac{1}{2}$. Bajo esta elección, se calcula la suerte de Pablo (que es entonces $\frac{774}{50 \cdot 51}$) y llega a la conclusión de que sería malo para Pablo aleatorizar de esta manera, ya que él podía garantizarse para sí mismo una suerte mayor, $\frac{780}{50 \cdot 51}$. Por lo tanto, Bernoulli concluye que Pablo siempre debe cambiar con un siete. A continuación, explica el razonamiento que había dejado fuera de su carta al escribirla a toda prisa el 2 de junio. En términos contemporáneos, se calcula la probabilidad no condicionada de ganar bajo cada perfil de estrategia pura (sin asumir que cualquier carta ha sido tratada aún). Muestra una versión refinada del razonamiento que antes le había llevado a considerar el de Waldegrave como una falacia, y, sin embargo, no lo reconoce.

En el siguiente apartado presentamos los últimos comentarios sobre la correspondencia.

3. RESOLUCIÓN DESDE UN PUNTO DE VISTA ACTUAL

En cada partida hay al menos tres cartas implicadas, supongamos ellas de valores *i*, *j*, y *k*, tal que Pablo consigue *i*, Pedro consigue *j*, y si la partida concluye con Pedro extrayendo una carta de la baraja, él consigue *k*. La probabilidad de Pablo de ganar se puede escribir como

$$p(i,j;S) = \frac{p(i,j)c(i,j;S)}{50},$$

donde $p(i,j)$ es la probabilidad de conseguir los valores (i,j) para las dos cartas extraídas, y $c(i,j;S)$ es el número de cartas entre las 50 restantes que hacen que Pablo gane, dado que los jugadores usan la estrategia *S*. Asumiendo que la apuesta es la unidad, la esperanza de Pablo es igual a su probabilidad de ganar.

Obviamente, $p(i,j)$ es igual a $(4/52)(4/51)$ para $i \neq j$ y $(4/52)(3/51)$ para $i = j$. Para ilustrar el cálculo de $c(i,j;S)$, hemos considerado que Pablo mantiene cartas de valores 7 y superior y cambia cartas de valores inferiores. Los resultados se muestran en la tabla que acompaña.

Tabla de $c(i,j;S)$

	Pedro cambia								Pedro retiene					
i \ *j*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	$c(i;S)$
Pablo cambia														
1	0	7	11	15	19	23	27	31	35	39	43	47	0	297
2	0	0	11	15	19	23	27	31	35	39	43	47	0	290
3	0	0	0	15	19	23	27	31	35	39	43	47	0	279
4	0	0	0	0	19	23	27	31	35	39	43	47	0	264
5	0	0	0	0	0	23	27	31	35	39	43	47	0	245
6	0	0	0	0	0	0	27	31	35	39	43	47	0	222
Pablo retiene														
7	27	27	27	27	27	27	24	24	0	0	0	0	0	204
8	31	31	31	31	31	31	31	28	0	0	0	0	0	238
9	35	35	35	35	35	35	35	35	0	0	0	0	0	280
10	39	39	39	39	39	39	39	39	50	0	0	0	0	362
11	43	43	43	43	43	43	43	43	50	50	0	0	0	444
12	47	47	47	47	47	47	47	47	50	50	50	0	0	526
13	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	0	600
Total														4251

Las combinaciones de *i* y *j* para que Pablo pierda, $c = 0$, y Pablo gane, $c = 50$, se siguen inmediatamente de las reglas del juego. Consideramos a continuación una de las combinaciones que tienen $1 \le i \le 6$ y $i < j < 13$. Para $i \le 6$, Pablo obliga a Pedro a intercambiar cartas, cuando Pedro tiene una carta de valor *i*, y sabe que Pablo tiene una carta de valor *j* mayor que *i* (lo sabe porque es la que él recibió al principio). Entonces, Pedro extrae una carta de la baraja y consigue una de valor *k*. Pablo gana si $k < j$, y el número de cartas que satisfacen esta condición es

$$c(i, j; S) = 3 + 4(j - 1) = 4j - 1.$$

Para $7 \le i \le 12$ y $1 \le j \le 6$, un argumento similar da $c(i, j; S) = 4i - 1$.

Para un valor dado de *i* la probabilidad de Pablo de ganar se convierte en

$$p(i; S) = \sum_j p(i, j; S) = \frac{2c(i; S)}{13 \times 51 \times 25},$$

donde

$$c(i; S) = \sum_{i \neq j} c(i, j; S) + \frac{3}{4} c(i, i; S).$$

La probabilidad total de ganar para Pablo se convierte en

$$p(S) = \sum_i p(i; S) = \frac{2}{13 \times 51 \times 25} \sum_i c(i; S).$$

Para la estrategia definida en la tabla anterior,

$$p(S) = \frac{2 \times 4251}{13 \times 51 \times 25} = \frac{2834}{5525} = 0,5129.$$

Montmort no explica estos cálculos relativamente simples; solo ofrece una tabla con los valores de $2c(i; S)$ para las cuatro estrategias en cuestión.

Tabla de Montmort de $2c(i;S)$ y probabilidad de Pablo de ganar

Valor de la carta de Pablo	Pablo cambia 7 y menos		Pablo retiene 7 y más	
	Pedro cambia 8 y menos	Pedro retiene 8 y más	Pedro retiene 8 y más	Pedro cambia 8 y menos
1	594	594	594	594
2	580	580	580	580
3	558	558	558	558
4	528	528	528	528
5	490	490	490	490
6	444	444	444	444
7	390	390	360	408
8	476	434	434	476
9	560	590	590	560
10	724	746	746	724
11	888	902	902	888
12	1052	1058	1058	1052
13	1200	1200	1200	1200
$p(S)$	2828/5525 =0,5119	2838/5525 =0,5137	2828/5525 =0,5119	2834/5525 =0,5129
Estrategia	CC	CR	RR	RC

Fuente: Montmort (1713), p. 413. (C) cambia; (R) retiene.

Hemos añadido las fracciones decimales para $p(S)$ y hemos etiquetado con CC el caso en que ambos jugadores cambian, CR, cuando Pablo cambia y Pedro retiene, RR, cuando ambos jugadores retienen (ninguno de los dos cambia de carta) y RC, cuando Pablo no cambia de carta y Pedro sí.

Se verá que los números de la última columna de la tabla de Montmort son obtenidos como $2c(i;S)$ de la tabla previa.

Volviendo a la correspondencia, la primera carta de Montmort sobre *Her* contiene la nota de que la ventaja de A se encuentra entre $1/85$ y $1/84$. Ya que

$$\frac{2.828}{5.525} - \frac{1}{2} = \frac{131}{11.050} = \frac{1}{84,4},$$

esto indica que Montmort ha encontrado que la probabilidad de A de ganar es (como mínimo) $2.828/5.525$.

En su réplica Bernoulli dice que si uno supone que cada jugador elige la estrategia que le es más ventajosa, entonces si Pablo elige C, Pedro también elige C, y cuando

Pablo elige R, Pedro también elige R, y en ambos casos la probabilidad de Pablo de ganar es $2828/5525$. Sin embargo, añade, es más ventajoso para Pablo usar la estrategia C antes que R, y "esto es un enigma que os dejo para desarrollar". Obviamente, la nota de Bernoulli se refiere al hecho de que la estrategia C da ya sea $2828/5525$ o $2838/5525$, mientras que la estrategia R solamente da $2828/5525$ o $2834/5525$.

Montmort replica que la solución de Bernoulli coincide con la suya propia. Sin embargo, antes de pedir la opinión de Bernoulli él ha discutido durante algún tiempo el problema con dos de sus amigos. El Sr. Abad de Orbais (también Montmort lo nombra como Monsoury) y el Sr. Waldegrave, y ellos son de otra opinión; el Sr. Abad de Orbais mantiene que es imposible determinar las suertes de Pablo ni de Pedro, pues uno no puede encontrar la estrategia óptima de Pablo sin conocer la estrategia de Pedro y viceversa, y esto lleva a un argumento circular. Hemos ilustrados esto en la siguiente tabla, asumiendo que Pablo comienza eligiendo la estrategia C.

Tabla de suertes de Pablo según las cuatro estrategias

Estrategia de Pablo	Estrategia de Pedro		
	C		R
C	$2828/5525$	←	$2838/5525$
	↓		↑
R	$2834/5525$	→	$2828/5525$

Como hemos comentado en el apartado anterior, Montmort muestra la carta de Bernoulli a sus amigos, y en respuesta Waldegrave escribe una carta a Montmort indicando sus objeciones. Aunque usando un razonamiento más sofisticado que el mostrado antes, llegan al argumento circular y sostienen que si los jugadores usan la estrategia C o R no hacen ninguna diferencia. Concluye que la solución de Bernoulli es falsa porque se "al parecer el Sr. Bernoulli se contentó…" (cita ya presentada en el apartado anterior).

No es de extrañar que Bernoulli no entienda la implicación de esta nota, ya que los mismos escritores no han comprendido las implicaciones de su punto de vista. Bernoulli no está convencido; ahora da los argumentos para su solución previa. Si Pablo ha elegido una estrategia, C o R, entonces Pedro elige la misma estrategia, porque esta elección minimiza la chance de Pablo y así maximiza la suya propia; para estas dos combinaciones de estrategias la chance de Pablo es $2828/5525$. Sin embargo, Bernoulli dice que, si es imposible para los jugadores decidir qué estrategia usar, pueden dejar la decisión al azar y cada uno elegir una estrategia con probabilidad de $\frac{1}{2}$, lo que hace la chance de Pablo igual a $2832/5525$. También dice que este procedimiento no lleva a una única solución porque la chance de Pablo es $2833/5525$ si él siempre usa la estrategia C y Pedro deja la decisión al azar. (Bernoulli usa números ligeramente diferentes en su razonamiento.)

En la última carta sobre *Her*, la de 15 de noviembre de 1713, Montmort escribe que ahora está convencido de que las consideraciones de él mismo y de Bernoulli no representan una solución porque ellas presuponen que Pablo conoce la estrategia de Pedro. Adopta la idea de elegir una estrategia al azar y da la chance de Pablo como

$$\bar{p} = \frac{2828ac + 2834bc + 2838ad + 2828bd}{5525(a+b)(c+d)},$$

donde $a/(a+b)$ y $c/(c+d)$ son las probabilidades de Pedro y Pablo de elegir la estrategia C, respectivamente. Montmort es incapaz de encontrar el valor óptimo de estas probabilidades y concluye que es imposible resolver el problema. Sin embargo, antes de que concluyese su carta recibe una de Waldegrave con la solución, que él incluye en la carta a Bernoulli.

Poniendo $a = 3$ y $b = 5$, Waldegrave encuentra que $\bar{p} = 2.831{,}75/5.525 = 0{,}5125$ cualquiera que sea la estrategia que elija Pablo y así, también, cualquier valor de *c* y *d* que él elija. Da una clara discusión de esta solución, mostrando que, si Pedro elige cualquier otra estrategia, existe una estrategia para Pablo que hace que la chance o suerte de Pedro sea menor. Por tanto, $a = 3$ y $b = 5$ es la estrategia óptima para Pedro. Además, Waldegrave observa que Pablo es capaz de limitar la chance o suerte de Pedro a $2.831{,}75/5.525$ eligiendo $c = 5$ y $d = 3$, y ésta es la estrategia óptima para Pablo. La introducción de un dispositivo de chance resuelve así el problema del argumento circular y da un determinado valor único de la chance o suerte de Pedro.

La teoría matemática sobre juegos de estrategia no fue desarrollada hasta los años veinte del pasado siglo con los trabajos de Borel y Von Neumann y el texto fundamental de Von Neumann y Morgenstern (1944).

Comentaremos brevemente sobre la relación entre la solución de Waldegrave y la teoría moderna. Dejemos que a_{ij}, $i = 1, 2$ y $j = 1, 2$ represente los valores de la chance de Pablo en la tabla anterior 2×2, *i* y *j* denotando las estrategias de Pablo y Pedro, respectivamente. Bajo los supuestos hechos por Montmort y Bernoulli, Pablo consigue al menos

$$\max_i \min_j a_{ij} = \frac{2.828}{5.525},$$

y como máximo

$$\min_i \max_j a_{ij} = \frac{2.834}{5.525}.$$

Ya que

$$\max_i \min_j a_{ij} < \min_i \max_j a_{ij} \, ,$$

no hay solución única por medio de estrategias puras.

Introduciendo estrategias mixtas y tomando $x = a/(a+b)$ e $y = c/(c+d)$, la fórmula de Montmort para la chance de Pablo se convierte en

$$\bar{p}(x,y) = a_{22} + (a_{12} - a_{22})x + (a_{21} - a_{22})y - (a_{21} - a_{22} + a_{12} - a_{11})xy \, .$$

Al igual que en el ejemplo, asumiremos que los coeficientes de *x* e *y* son positivos y el coeficiente de *xy* negativo.

Waldegrave determina el valor óptimo de *x*, digamos x_0, por la condición de que $\bar{p}(x_0, y)$ ha de ser independiente de *y*. Poniendo el coeficiente de *y* igual a cero, obtenemos

$$x_0 = \frac{a_{21} - a_{22}}{a_{21} - a_{22} + a_{12} - a_{11}} = \frac{3}{8} \, ,$$

$$\bar{p}(x_0, y) = \frac{a_{22} + (a_{12} - a_{22})(a_{21} - a_{22})}{a_{21} - a_{22} + a_{12} - a_{11}} = \frac{2831'75}{5525} \, .$$

Además, Waldegrave dice que si Pablo elige una estrategia diferente de x_0, entonces existe una estrategia *y* para Pedro tal que $\bar{p}(x,y) < \bar{p}(x_0,y)$ para $x \neq x_0$. Para probar esto, considerar la diferencia

$$\bar{p}(x_0, y) - \bar{p}(x,y) = (x - x_0)\left\{-(a_{12} - a_{22}) + (a_{21} - a_{22} + a_{12} - a_{11})y\right\} \, .$$

Si $x > x_0$, entonces Pedro elige $y = 1$ para hacer la diferencia tan grande como sea posible y positiva. Si $x < x_0$, entonces Pedro elige $y = 0$, que de nuevo hace la diferencia tan grande como es posible y positiva. Por tanto,

$$\bar{p}(x_0, y) = \max_x \min_y \bar{p}(x,y) .$$

Análogamente, se encuentra que el valor óptimo de *y* es igual a

$$y_0 = \frac{a_{12} - a_{22}}{a_{21} - a_{22} + a_{12} - a_{11}} = \frac{5}{8} \, ,$$

y que $\bar{p}(x, y_0) = \bar{p}(x_0, y)$, lo que significa que

$$\max_x \min_y \bar{p}(x,y) = \min_y \max_x \bar{p}(x,y) \, .$$

Este es el teorema fundamental minimax, que demuestra que el uso de estrategias mixtas conduce unívocamente a un valor determinado del juego.

Concluimos este apartado con una última consideración de Montmort (en su última carta dentro del *Essay*) en la que se muestra consciente de la importancia de este tipo de juego. Escribe que “Estas cuestiones son bastante simples, pero creo imposible resolver; si esto es así es una lástima porque esta dificultad se presenta en muchos casos de la vida civil: por ejemplo, cuando dos personas hacen negocios cada una de ellas ajustará su comportamiento después de la otra; también tiene lugar en diversos juegos” (1713, p. 406).

Mostramos a continuación el anexo a esa última carta de Montmort, que el propio autor incluyó con los resultados de los cálculos asociados al problema del *Her* para dos jugadores.

Comme dans ces dernieres Lettres on a parlé du Her, j'ai jugé qu'il étoit à propos d'en mettre ici les calculs, pour épargner au Lecteur la peine de les faire.

	Sort de Paul quand il a la maxime de changer au sept, & Pierre celle de changer au huit.	Pierre a la maxime de se tenir au huit.	Sort de Paul quand il a la maxime de se tenir au sept, & Pierre celle de se tenir au huit.	Pierre celle de changer au huit.
Roy,	1200	1200	1200 . . .	1200 . . .
Dame,	1052	1058	1058 . . .	1052 . . .
Valet,	888	902	902 . . .	888 . . .
Dix,	724	746	746 . . .	724 . . .
Neuf,	560	590	590 . . .	560 . . .
Huit,	476	434	434 . . .	476 . . .
Sept,	390	390	360 . . .	408 . . .
Six,	444	444	444 . . .	444 . . .
Cinq,	490	490	490 . . .	490 . . .
Quatre,	528	528	528 . . .	528 . . .
Trois,	558	558	558 . . .	558 . . .
Deux,	580	580	580 . . .	580 . . .
As,	594	594	594 . . .	594 . . .
	$\frac{8484}{13\cdot51\cdot25} = \frac{2828}{5525}$	$\frac{8514}{13\cdot51\cdot25} = \frac{2838}{5525}$	$\frac{8484}{13\cdot51\cdot25} = \frac{2828}{5528}$	$\frac{8502}{13\cdot51\cdot25} = \frac{2834}{5525}$

4. LA APORTACIÓN DE TREMBLEY (1804)

Jean Trembley nació en Ginebra en 1749 y murió 18 de septiembre de 1811. Escribió sobre una amplia gama de temas, incluyendo sobre cálculo, ecuaciones diferenciales, diferencias finitas, probabilidad y diversos problemas aplicados. Sus trabajos fueron publicados en las Memorias de las Academias de Gotinga, Berlín, Turín y San Petersburgo. Aunque era un autor prolífico, no fue relevante en los campos donde trabajó y, además, estaba tan eclipsado por sus contemporáneos como Laplace y Lagrange que podemos decir que hoy día apenas si es citado en los análisis históricos.

Con respecto a las cuestiones de probabilidad y afines, Trembley aportó ocho trabajos. Los dos primeros fueron publicados en los volúmenes XII y XIII del *Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis* en los años 1796 y 1799. Los otros seis aparecieron en las *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres* entre los años 1799 y 1804. Todos ellos tienen algo en común: tratan de "simplificar" o "explicar" el trabajo realizado por los matemáticos más capaces.

Todhunter (1865), uno de los pocos historiadores de la materia que estudia a Trembley, no habla bien de él. Sin embargo, le dedica un capítulo entero a dar su punto de vista sobre estos trabajos. El último de los de los ocho publicados por Trembley sobre probabilidad y afines fue "Observations sur le calcul d'un Jeu de hasard" en *Mémoires de l'Académie ciencias et des belles-lettres ... Berlín*, 1802, pp. 86-102. La fecha de publicación es de 1804. En este documento se refiere al problema planteado por Montmort en el juego de *Her*.

Una de las características de Trembley en sus escritos sobre estos asuntos es la pormenorización que practica, presentando los máximos detalles de sus cálculos, al contrario de lo que hasta ahora había ocurrido para el caso del *Her*, como se ha visto en los apartados anteriores. Como ilustración de lo que comentamos presentamos en el recuadro un fragmento de los cálculos que Trembley presenta para el caso de dos jugadores (estamos a principios del XIX cuando ya el término "esperanza" se va universalizando).

§.5. Si Pablo tiene un rey, él no va a cambiar; luego de las 51 cartas restantes, sólo existen los tres reyes que le hacen perder, por lo tanto, su esperanza es

$$y = \frac{3 \cdot 0 + 48 \cdot 1}{51} = \frac{48}{51},$$

y esta esperanza tiene lugar, tanto si Pedro desea cambiar como si no.

§.6. Si Pablo tiene una reina, no la cambiará; en este caso si Pedro se mantiene en el ocho, su esperanza es la que sigue

$$y = \frac{7 \cdot 0 + 16 \cdot 1 + 28z}{51}.$$

Ahora $z=\dfrac{3\cdot 0+47\cdot 1}{50}$. Por tanto,

$$y=\frac{16\cdot 1+\dfrac{28\cdot 47}{50}}{51}=\frac{2116}{51\cdot 50}.$$

Si Pedro cambia en el ocho, Pablo tiene

$$y=\frac{7\cdot 0+12\cdot 1+32z}{51},\quad z=\frac{3\cdot 0+47\cdot 1}{50},$$

por lo que

$$y=\frac{12\cdot 1+\dfrac{32\cdot 47}{50}}{51}=\frac{2104}{51\cdot 50}.$$

§.7. Si Pablo tiene una sota, él no cambiará; en este caso, si Pedro se mantiene en el ocho, se tiene

$$y=\frac{11\cdot 0+12\cdot 1+28z}{51},\quad z=\frac{7\cdot 0+43\cdot 1}{50},$$

por lo que

$$y=\frac{12\cdot 1+\dfrac{28\cdot 43}{50}}{51}=\frac{1804}{51\cdot 50}.$$

Si Pedro cambia en el ocho, Pablo tiene

$$y=\frac{11\cdot 0+8\cdot 1+32z}{51},\quad z=\frac{7\cdot 0+43\cdot 1}{50},$$

por lo que

$$y=\frac{8\cdot 1+\dfrac{32\cdot 43}{50}}{51}=\frac{1776}{51\cdot 50}.$$

§.8. Si Pablo tiene un diez, él no cambiará; en este caso, si Pedro se mantiene en el ocho, se tiene

$$y=\frac{15\cdot 0+8\cdot 1+28z}{51},\quad z=\frac{11\cdot 0+39\cdot 1}{50},$$

por lo que

$$y=\frac{8\cdot 1+\dfrac{28\cdot 39}{50}}{51}=\frac{1492}{51\cdot 50}.$$

Si Pedro cambia en el ocho, Pablo tiene

$$y = \frac{15\cdot 0 + 4\cdot 1 + 32z}{51}\,, \quad z = \frac{11\cdot 0 + 39\cdot 1}{50}\,,$$

por lo que

$$y = \frac{4\cdot 1 + \dfrac{32\cdot 39}{50}}{51} = \frac{1428}{51\cdot 50}\,.$$

Después de completar y presentar todos sus cálculos presenta la siguiente tabla que nos recuerda a la que Montmort incorporó en el anexo de su última carta en el *Essay*.

Parte de Pablo

Cartas de Pablo	Pablo se mantiene en el 7. Pedro se mantiene en el 8	Pablo se mantiene en el 7. Pedro cambia en el 8	Pablo cambia en el 7. Pedro se mantiene en el 8	Pablo cambia en el 7. Pedro cambia en el 8
Rey	1200	1200	1200	1200
Reina	1058	1052	1058	1052
Sota	902	888	902	888
Diez	746	724	746	724
Nueve	590	560	590	560
Ocho	434	476	434	476
Siete	360	408	390	390
Seis	444	444	444	444
Cinco	490	490	490	490
Cuatro	528	528	528	528
Tres	558	558	558	558
Dos	580	580	580	580
As	594	594	594	594
Media	$\frac{8484}{13\cdot 25\cdot 51}$	$\frac{8502}{13\cdot 25\cdot 51}$	$\frac{8514}{13\cdot 25\cdot 51}$	$\frac{8484}{13\cdot 25\cdot 51}$

Parte de Pedro

Media	$\frac{8091}{13\cdot 25\cdot 51}$	$\frac{8073}{13\cdot 25\cdot 51}$	$\frac{8061}{13\cdot 25\cdot 51}$	$\frac{8091}{13\cdot 25\cdot 51}$

En la investigación de Trembley de la chance de Pedro, considera esta chance en el momento en que Pablo ha hecho su elección sobre si va a cambiar o no. Pero esto es de poco valor para el mismo Pedro; Pedro querría saber cómo actuar en determinadas circunstancias, y antes de saber si Pablo retuvo la carta que obtuvo en primera o le obligó a un intercambio. Por lo tanto, la investigación de Trembley de la suerte de Pedro difiere del método antes considerado.

Los cálculos para dos jugadores se detienen aquí. Como vemos, presenta probabilidades condicionadas. No concluye con una solución global. No entiende el razonamiento de Waldegrave que conduce a la solución minimax antes desarrollada.

Concluye esta parte para dos jugadores con el siguiente párrafo:

El Sr. de Montmort y sus amigos concluyen entonces contra Nicolás Bernoulli, que este caso era irresoluble, porque dijeron que, si Pablo sabe que Pedro se queda en el ocho, él va a cambiar en el siete, pero si Pedro llega a conocer que Pablo cambia en el siete, él va a cambiar en el ocho, llegando a un círculo vicioso. Pero sólo se deduce entonces que cada uno estará perpetuamente en la incertidumbre sobre la forma de juego de su adversario; en consecuencia, Pablo hará un cambio en siete en una jugada dada, pero él no seguirá constantemente este sistema en una secuencia de muchas jugadas. Asimismo Pedro puede cambiar en el ocho en una jugada dada, sin ser capaz de hacer varias jugadas iguales en una secuencia, lo que está de acuerdo con las conclusiones del Sr. Nicolas Bernoulli y en contra de las del Sr. de Montmort.

Todhunter (1865) opina que no es correcto decir que la conclusión aquí obtenida coincide con la de Nicolás Bernoulli y en contra de la de Montmort: “Los adversarios de Nicolas Bernoulli sólo parecen haber afirmado que era imposible decir en qué regla Pablo debe actuar de manera uniforme, y esto lo permite Trembley”.

Después, en el mismo documento, Trembley hace un intento de resolución del problema del *Her* para tres jugadores; pero su solución igual que antes, resulta insatisfactoria. Supongamos que hay tres jugadores, Pablo, Santiago y Pedro. Trembley considera que las posibilidades de Pablo y Santiago están en la proporción de las posibilidades del primer y segundo jugador cuando sólo hay dos jugadores; y denota estas chances por x e y. Toma la proporción de x a y como 8496 a 8079. Después, supone que las chances de Santiago y Pedro están también en la misma proporción. Esto no sería del todo exacto, ya que cuando Santiago está estimando su chance con respecto a Pedro ya tendría algún conocimiento de la carta de Pablo; mientras que, en el caso de Pablo y Santiago, el primero no tiene conocimiento de cualquier otra carta que no sea la suya para orientarle sobre mantenerse en su carta o cambiar.

Entonces, la insatisfacción de los cálculos de Trembley está en el siguiente paso. Considera que $\frac{x}{x+y}$ es la probabilidad de que Pablo le ganará a Santiago, y que $\frac{y}{x+y}$ es la de que Pedro le ganará a Pablo; infiere que $\frac{xy}{(x+y)^2}$ es la de que ambos, Pablo y Pedro ganen a Santiago, por lo que Santiago será eliminado en la primera jugada. Esto no es correcto: el juego está construido de manera que los jugadores están casi en el mismo plano; por lo que $\frac{1}{3}$ está muy próximo a la chance de que un jugador dado sea excluido en la primera prueba. La solución de Trembley dará $\frac{1}{4}$ como la chance de que Santiago será excluido si $x = y$.

El error surge del hecho de que $\frac{x}{x+y}$ e $\frac{y}{x+y}$ no representan aquí chances independientes; por supuesto si Pablo tiene una carta más alta que Santiago, esto por sí solo produce la presunción de que Santiago tendrá más bien una carta inferior a la de Pedro que superior. Este error en el inicio vicia la solución de Trembley.

Como parte complementaria de su solución Trembley muestra igual que lo hizo para dos jugadores, sus cálculos pormenorizados con una larga extensión, pudiendo de nuevo resultar tediosa.

BIBLIOGRAFÍA

DAVID, F. N. (1962). *Games, Gods and Gambling.* Charles Griffin & Co. Ltd., London.

FISHER, R. A. (1934). Randomisation, and an old enigma of card play. *The Mathematical Gazette*, 18, 294-297.

HALD, A. (1990). *A History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750.* John Wiley & Sons. New York.

MONTMORT, P. R. de (1708). *Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard*. Quillau, París. Publicado de forma anónima.

MONTMORT, P. R. de (1713). *Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard*. Seconde Edition. Revûe et augmentée de plusieurs Lettre. Quillau, París. Publicado de forma anónima.

NEUMANN, J. VON, and MORGENSTERN, O. (1944). *Theory of games and economic behaviour.* 2ª ed (1947). Princenton Univ. Press, New Jersey

Todhunter, I. (1865). *A History of the of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace.* Macmillan, London. Reprinted by Chelsea, New York, 1949.

TREMBLEY, J. (1802). "Observations sur le calcul d'un Jeu de hasard" *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres. Berlin 1802*, pp. 86-102.

CAPÍTULO 3

HACIA UNA ARQUEOLOGÍA DEL MUESTREO ESTADÍSTICO: DE ARTHUR L. BOWLEY A LOS "BIG DATA"

JOSÉ M ARRIBAS MACHO
Universidad Nacional de Educación a Distancia

1. INTRODUCCIÓN

A propósito del discurso científico, Michel Foucault (1969) en "L'arqueologie du savoir", plantea cómo los enunciados dispersos en el tiempo, forman un conjunto cuando se refieren a un único y mismo objeto. El estilo (mismo vocabulario, mismo juego de metáforas) da un cierto carácter a la enunciación, aunque además del discurso cuenten otras cosas: por ejemplo, el discurso clínico, más que un conjunto de prescripciones, es un conjunto de hipótesis sobre la vida y la muerte, de decisiones éticas, de decisiones terapéuticas, de reglamentos institucionales y de modelos de enseñanza. La arqueología que propone Foucault trata de definir discursos por su especificidad, y es en realidad, un análisis diferencial de las modalidades discursivas. Define los tipos y reglas de las prácticas discursivas que atraviesan las obras individuales, es la descripción sistemática de un discurso-objeto. Con este marco conceptual nos proponemos contraponer el discurso que aparece en el seno de la disciplina estadística a principios del siglo XX sobre el muestreo estadístico, con el discurso establecido por la práctica estadística conocida como "Big Data" a comienzos del siglo XXI.

2. EL MUESTREO ESTADÍSTICO

El muestreo estadístico no ha estado exento de polémica en el seno de la disciplina debido a la predilección de los investigadores por el conjunto de datos que representaban los censos. La exhaustividad de la información fue contemplada como una ventaja en los comienzos de la estadística. La información facilitada por los llamados datos censales, con independencia de los errores que llevaran implícitos su producción y elaboración, fue durante mucho tiempo la fuente más fiable frente a la utilización de pequeñas muestras. Desde las primeras estimaciones de la población de Francia como muestras intencionadas (S. XVIII), hasta la práctica generalización de las encuestas basadas en el método representativo después de la II Guerra mundial, el método pasará por contextos tan distintos como las Investigaciones agrícolas en USA (1863 «crop reporters»), las encuestas agrarias desarrolladas por Kiaer (Noruega,1870), los trabajos de Kaufman y Chuprov (Rusia,1880) 1900, la selección razonada de Gurev (1900:Vjatka), o el debate sobre su aceptación por los estadísticos del Instituto Internacional en el congreso de Roma (IIS:1925), experiencias y debates que irán consolidando esta práctica como el centro de una nueva disciplina que se llamará estadística matemática[1].

Son muchos los aspectos a tener en cuenta en ese proceso, desde el papel de las instituciones científicas, la aparición de matemáticos dedicados a los asuntos de Estado, la profesionalización de los estadísticos, e incluso la cuestión social. Esta última jugará un papel determinante en la aceptación del nuevo sistema de muestreo estadístico. Con el cambio del siglo XIX al siglo XX, se realizan muchas encuestas sobre pobreza, salarios, condiciones de vida de los trabajadores que constituyen el sustrato de la reflexión sobre la representatividad de los datos obtenidos a partir de subconjuntos de una población.[2] La historia de los sondeos correrá así un camino paralelo a las prácticas administrativas destinadas a conocer el número de parados y las condiciones de vida de la clase obrera, siendo abordado de forma institucional por el noruego Kiaer en varios coloquios del Instituto Internacional de Estadística (IIE1895, Berna; IIE1897, San Petesburgo; IIE1901, Budapest) hasta contar al final con el apoyo del USA *Department of Labor* como sistema válido para estimar el número de parados.

Pero nos interesa retener el modo como esta técnica se presenta ante las instituciones científicas, el modo como se construye un discurso oficial, o si se quiere, el discurso de validez científica de esta práctica estadística. Para ello podemos dirigir-

[1] Véase ARMATTE, M. (2004). "La introducción en Francia de los métodos de muestreo aleatorio", *Empiria*, nº 8, pp. 55-84.

[2] Baste citar entre las encuestas sociales las realizadas en Inglaterra: encuestas de Booth y Rowntree (1887), Encuesta del Board of Trade (1909) sobre costes laborales, Encuesta de Bowley en Reading (1913); en Noruega: Strom 1888(18.000 hogares) y Kiaer 1890 (11.500 personas); en Alemania: encuestas utilizadas por Halbwachs en su tesis de 1913, Francia: (1913-14)v Encuesta de la SGF no aleatoria dirigida a familias de obreros, empleados, artesanos, asalariados agrícolas (12.550 cuestionarios distribuidos, 2000 explotados). Vease ARMATTE, M., *op cit.*

nos a dos tipos de textos bien distintos: en primer lugar, el discurso seminal de Arthur L Bowley, leído en 1906 ante la sección económica de la asociación británica para el avance de la ciencia (*Presidential Adress to the Economic Section of the British Association for the Advanced Sciences*)[3], y, en segundo lugar, un texto actual sobre el llamado fenómeno *Big data*.

Arthur L. Bowley[4], en su informe de 1906 dice que, a comienzos del siglo XX, la estadística era prácticamente inexistente en Inglaterra, y que no existían matemáticos capaces de aplicar sus conocimientos a los asuntos públicos. Primera cuestión a tener en cuenta, cuando se está construyendo el discurso que legitima una nueva disciplina es importante insistir en que no existía nada semejante antes de ese momento histórico, y segunda cuestión relevante, en esos años, cualquier nueva disciplina ha de contar con los atributos de la cientificidad, y para ello debe contar con el **método** científico: "un método de medida que permita diferenciar lo verdadero de lo falso en cualquier razonamiento basado en la construcción de tablas estadísticas.[5] Años más tarde, ante la imposibilidad de realizar verificaciones empíricas en algunos campos de las ciencias sociales, se insistirá (por ejemplo, Halbwachs) en que los modelos estadísticos sustituyen el proceso de verificación empírica.

Bowley distingue entre las técnicas de recuento (*ars statistique*), la estadística de los censos de población, las técnicas de producción de datos, y una nueva ciencia estadística que se asemeja a las ciencias naturales en la medida en que sus desarrollos teóricos tienen aplicaciones prácticas (estudios sobre gradación de impuestos o estimación del coste de la vida de los trabajadores, etc.). En su discurso como presidente de la sección estadística de la asociación británica para el avance de la ciencia, incorpora la idea de **precisión**, y sobre todo, la de **error probable**, ideas que toma de la astronomía. En Estadística, **exactitud** y precisión consisten en estimar los límites del error probable, pues, en definitiva, nos dice: la consistencia de las estimaciones

---

[3] Tres años más tarde, Edgewort, aborda el tema en el coloquio del Instituto Internacional de Estadística de Paris, con una ponencia titulada: *"On the application of the calculus of probabilities to statitics"*. A todas estas intervenciones institucionales hay que añadir los trabajos de investigadores en el campo agrícola como Roland Fisher, de modo que entre 1920 y 1925 la teoría de sondeos está prácticamente consolida con las aportaciones de R. Fisher: *Statistical methods for research workers (1925).*

[4] Nace en Bristol, England (1868-1957), en la familia de un ministro de la iglesia anglicana., y muy pronto queda huérfano. Estudia matemáticas, y se orienta hacia la aplicación de las matemáticas en economía y sociología bajo la influencia de Edgeworth y Marshall. En 1915 comienza a impartir clases de Estadística Económica, y en 1919 ocupa la primera cátedra de Estadística en la Universidad de Londres. Ocupó puestos de responsabildad en la London School of Economics y fue uno de los fundadores de la *International Econometric Society*.

[5] Arthur L. Bowley. Discurso publicado en el boletín de la Royal Statistical Society). Los principales trabajos de Bowley: Livelihood and Poverty: a study in the economic conditions of working-class households, with A.R. Bennett-Hurst, 1915; Has Poverty Diminished? with M.Hogg, 1925; The National Income 1924 with J. Stamp, 1927; Measurement of Precision attained in Sampling Bulletin de l'Institut International de Statistique, 1926, New Survey of London Life and Labour, 1930-35.; Three Studies in National Income, 1939.

estadísticas puede mejorarse mediante la utilización de muestras cuidadosamente seleccionadas. Para controlar una medida, Bowley proponía la **estimación más probable**, así para una media de salarios utiliza enunciados del tipo *24s. + 6d.*, adoptando el método canónico en la disciplina que incorpora la desviación típica como medida de seguridad *("en una curva normal de frecuencias, dos tercios del área, están en la desviación tipo")* En definitiva, comienza a utilizar un tipo enunciados que calca de otras ciencias ya consolidadas como la astronomía o la física.

Dos vías diferentes, pero con idénticos resultados, eran posibles en el muestreo estadística: una formulación empírica y el ajuste de observaciones determinando una curva de frecuencias apropiada para asignar la probabilidad de las observaciones (Pearson), o aceptar la ley de los grandes números y determinar a priori los fenómenos en los que se puede aplicar esta ley, siguiendo a Edgeworth. Con un ejemplo del Investor's Record y del Almanach Nautique, Bowley mostraba cómo todos los elementos del conjunto debían tener la misma probabilidad de selección y cómo la precisión no dependía del tamaño de la población a muestrear, sino de la varianza poblacional y del tamaño de las muestras[6]. El método de muestreo servirá después de la II Guerra Mundial para consolidar el dispositivo de la encuesta estadística, pues como ha señalado Michel Armatte, se transforma "en un dispositivo fundamental de la reconstrucción del Estado del Bienestar; y en la deriva posterior hacia el Estado-empresario, la encuesta puesta al servicio de la Contabilidad Nacional, permite establecer previsiones a corto plazo y realizar la planificación en el medio plazo sobre bases empíricas, constituyendo el cuadro de navegación indispensable para el manejo razonado de la política económica" (Armatte, 2004:80)

Durante todo este período, el prestigio de la estadística inferencial y del método muestral, residió en su capacidad para sustituir el todo por la parte, si la primitiva estadística construía censos, la moderna hacía encuestas representativas. La estadística afirmaba que, si medimos determinados atributos en un pequeño colectivo que a su vez forma parte de otro mayor, su estructura será idéntica a la de la población de la cual se extrae, siempre y cuando hayamos seleccionado los objetos a medir de forma aleatoria, es decir, azarosa. El azar se encargaba de que nuestro pequeño colectivo resultase equivalente al grande; o mejor, el valor de lo que queremos medir, será esencialmente el mismo que si midiésemos el colectivo grande. Si extraemos muchas muestras de una población, la mayor parte de las medias de nuestras muestras estarán próximas a las de la población, aunque no nos diga nada de lo que sucederá extrayendo una sola (la práctica habitual en la investigación sociológica), tan sólo nos dice la probabilidad que tenemos de que nuestra muestra se desvíe de los valores de la población.

[6] Véase BOWLEY, A.L. (1910). *Sampling (an elementary manual of Statistics)*. Sección "Texto clásico", *Empiria*, nº 10, julio-diciembre 2005. Presentación José M. Arribas http://e-spacio.uned.es/revistasuned/index.php/empiria/article/view/1049/965

Ello nos lleva a considerar otro problema complejo como es el problema de la probabilidad, y a tener en cuenta que la teoría muestral no funcionaría si no llevase aparejada una teoría de la medida, o mejor, una teoría del error, que entre otras cosas sostiene que en toda medición se producen errores, y que los errores, cuando uno realiza un número suficientemente grande de mediciones, se cometen por defecto y por exceso en igual medida (Gauss, establece en 1790 la teoría de los mínimos cuadrados y la curva de errores) y puede establecerse la probabilidad con la que se comete cualquier tipo de error en una medición. La teoría de la probabilidad es el puente que une los grandes conjuntos de datos y las muestras, y algunos estadísticos gustan de señalar que es la que aporta las bases que permiten apreciar seguridad y precisión en la toma de muestras. En el modelo estadístico, la probabilidad de un acontecimiento es algo así como el grado de certidumbre que tenemos de su realización. Desde el punto de vista operacional, es una relación (un cociente) entre su frecuencia de realización y el número total de observaciones cuando este número es suficientemente grande. Durante los años treinta, «el método estadístico» también alcanzará gran notoriedad debido a que se presenta como el único método capaz de resolver el problema de la posición y la velocidad de los cuantos elementales de materia. Al menos en 1938, Einstein daba ya por inevitable el empleo del método estadístico en la física de partículas.

3. LOS *BIG DATA*

Veamos ahora el marco discursivo de una práctica estadística en boga en los comienzos del siglo XXI, como es el fenómeno llamado *Big data*. Para ello nos apoyaremos en un texto de reciente circulación de Viktor Mayer- Schönberger y Kenneth Cukier: "Big data (La revolución de los datos masivos)". Se trata de un texto realizado por dos especialistas en la materia, el primero, profesor de regulación y gestión de internet en el Internet Institut de la Universidad de Oxford, y el segundo, editor de datos de la revista *The Economist.*

La presentación del fenómeno *Big data* comienza en el texto con la publicación en la revista *Nature* de un artículo realizado por los ingenieros de Google en el que sostenía que podía predecirse la expansión de la gripe invernal en USA a través de la información facilitada por el gigante de internet: los fármacos y la información que la gente buscaba en la red. Los técnicos diseñaron un sistema que consistía en "buscar correlaciones entre la frecuencia de ciertas búsquedas y la propagación de la gripe a lo largo del tiempo y del espacio)" para lo cual procesaron cuatrocientos cincuenta millones de modelos matemáticos "su software halló una combinación de cuarenta y cinco términos de búsqueda que, al usarse conjuntamente en un modelo matemático, presentaba una correlación fuerte entres su predicción y las cifras oficiales de la enfermedad a lo largo del país" (Mayer-Schönberger, V, Cukier, K., 2013:12). El sistema de seguimiento de la gripe funcionaba, pero a diferencia del procedimiento habitual utilizado por el sistema sanitario oficial, la información se producía en tiempo real. Desde entonces el uso en tiempo real de la información en la red se ha venido utilizando en aplicaciones empresariales como la venta de billetes aéreos, reservas de hoteles. La posibilidad de manejar masas ingentes de datos ha dado lugar a una nueva práctica en el manejo de la información que requiere al mismo tiempo de la estadística y la informática. Nuestros autores definen los *big data* como datos masivos que "se refieren a cosas que se pueden hacer a gran escala (pero no a una escala inferior) para extraer nuevas percepciones o crear nuevas formas de valor, de tal forma que trasforman los mercados, las organizaciones, las relaciones entre los ciudadanos y los gobiernos, etc." (Mayer-Schönberger, V, Cukier, K., 2013:17) De semejante definición se deduce que hay un fuerte componente pragmático en la nueva técnica ("cosas que se pueden hacer") transformador de la sociedad, y que la escala, la amplitud de la información, juega un papel fundamental.

Lo primero que sorprende al considerar el método *big data,* es comprobar que la abundancia de datos parece justificarlo todo, incluso "la inexactitud". El marco teórico por el que deambulan los autores, conduce hasta relegar al científico a un segundo plano, pues, en la época de los datos masivos y las TIC, el investigador puede ser sustituido por máquinas, ciertamente ¡todo un cambio de paradigma!

> "*La mayor parte de nuestras instituciones han sido creadas bajo la presunción de que las decisiones humanas se basan en una información contada, exacta y de naturaleza causal. Pero la situación cambia cuando los datos son enormes, pueden procesarse rápidamente y admiten la inexactitud. Es más, debido al vasto tamaño de la información, muy a menudo las decisiones no las tomarán los seres humanos, sino las máquinas",* (Mayer-Schönberger, V, Cukier, K., 2013:29)

Nos enfrentamos, por tanto, a una nueva situación que, a diferencia de los años 1920 cuando se estaba legitimando las técnicas de muestreo estadístico, la actividad estadística *big data,* al parecer, permite la inexactitud y no necesita de la actividad del científico**.** Lo que constituía un mérito propio de la actividad científica, la precisión, se presenta ahora como un resabio de la era digital, algo antiguo y pasado de moda:

> *«Entrar en un mundo de datos masivos requerirá que cambiemos nuestra forma de pensar acerca de los méritos de la exactitud (...) la obsesión con la exactitud es un resabio de la era analógica privada de la información»* (Mayer-Schönberger, V, Cukier, K., 2013:58)

La correlación estadística apareció antes que el muestreo, el uso de datos censales permitió el uso de las técnicas de correlación, y ahora vuelve a la primera línea de las prácticas estadísticas con el *big data*. Nuestros autores afirman que si las correlaciones eran útiles en la época del muestreo "es en el contexto de los datos masivos donde realmente destacan», pero no tienen en cuenta que esta técnica como cualquier otra surge en una época determinada para dar respuesta a problemas concretos. Michel Armatte nos ha dejado la traza arqueológica de esta técnica estadística en un artículo titulado “El estatuto fluctuante de la correlación”[7] en el que plantea cómo la correlación recibe el estatuto de medida gracias a los trabajos biométricos de Galton y los programas eugenésicos, que también estarán de moda durante un tiempo, pero desaparecerán a partir de la II Guerra mundial. Su medida más conocida, a través del coeficiente *R* se debió a los trabajos de Karl Pearson [8] y a su relación con Galton, aunque habrá que esperar unos años hasta que los economistas se apoderen de la correlación:

> *“El año en el que Galton publica sus resultados sobre la regresión (1885) es también el de la lección inaugural de Marshall en Cambridge, el de la fundación del Instituto Internacional de Estadística y de la American Economic Association. Es también el fin de un largo período de liberalismo, Europa y los Estados Unidos se convierten al proteccionismo, y es también el comienzo de la Gran Depresión, una crisis que marca el comienzo y el fin de la hegemonía inglesa* (Armatte, 2001:619)

El manual de Arthur Bowley de 1901, uno de los primeros de la estadística moderna en palabras de Michel Armatte, presenta a los economistas tres importantes capítulos con las medidas de dispersión, la teoría de la regresión y la correlación. Otro momento en que se aborda la correlación ante el Instituto Internacional de Estadística será 1909, donde YULE[9], en su sesión de París. Allí aborda “*Les applications de la méthode de corrélation aux statistiques sociales et économiques*”, allí presenta aplicaciones de la correlación que relacionan salarios y pobreza, pobreza y tasas de asistencia a domicilio, relación entre tasas de matrimonio y precios del trigo, (el número de matrimonios aumentaba cuando la alimentación alcanzaba precios

[7] ARMATTE, M. (2001). “L’statut changeante de la correlation en econometrie (1910-1944)”, *Revue Economique*, Vol 52, nº 3, may 2001.

[8] “Sólo en el ámbito de las investigaciones biométricas de Galton entre 1875 y 1888, la correlación habría ya cambiado cuatro veces de estatuto. Por supuesto, tiene a la vez todas estas características si la distribución es binomial lo que la convierte en una poderosa herramienta de comparación. Pero es claro que se pueden movilizar estos diferentes estatutos o propiedades en función de programas de investigación, de sus objetivos, de la naturaleza de los datos, de la epistemología implícita a la cual se adhiere... Galton (…) lo que le interesa es el coeficiente de regresión que expresa un compromiso entre una herencia al 100% (que significaría que los grandes engendran grandes y los genios, genios, pero que conduciría a la explosión de las características humanas) y una herencia inexistente que haría que la reproducción del tipo (de la mediocridad en la terminología de Galton) destruiría completamente toda diferenciación de *abilities* de una generación a otra, arruinando el programa de una mejora de la especie.” (ARMATTE, M. 2001:618-619).

[9] “Yule es el propagandista de una verdadera reinterpretación de la correlación: la que esta “fundada” sobre la investigación de una ecuación de regresión (que él prefiere llamar ecuación de estimación) de la forma $y = bx$ o $x = cy$, y de donde se puede deducir un coeficiente $r = \sqrt{bc}$ que “mide la exactitud con la cual estas dos ecuaciones se aplican”. El coeficiente de correlación es por tanto de nuevo (como en Galton pero a la inversa de Pearson) un output secundario en la investigación de una relación de regresión lineal que él llama “causalidad estadística” (ARMATTE, M. 2001, p. 620).

bajos), así cómo movimientos demográficos y económicos. Después de la década de 1930, el interés de los economistas se desplazará hacia un nuevo campo estadístico como son las pruebas de hipótesis (test de hipótesis):

> *"El periodo 1930-1944 corresponde a la superposición de dos paradigmas, es decir, la lenta erosión de la correlación como problemática de la econometría, y la difícil emergencia de las teorías de los test en el campo económico"* (Armatte, 2001:626)

Ya en el siglo XXI, veremos cómo regresa el interés por la correlación desde en el campo del *Big data*: las correlaciones estadísticas sustituyen los procesos de causalidad, y ponen a prueba el proceso tradicional de descubrimiento científico. La hipótesis puesta a prueba usando un modelo causal se está extinguiendo, nos dicen[10], y está siendo sustituido por el análisis estadístico de correlaciones puras carente de teoría[11].

Con independencia de la utilidad de los métodos de correlación que nadie discute, no parece que la estadística actual pueda desprenderse de la teoría y las hipótesis de investigación sin caer en el mayor de los absurdos, o en una parodia de la investigación seria. Marc Barbut formulaba esta cuestión de forma muy clara: todo lo que se formaliza tiene detrás una teoría, y aquello que no tiene una teoría y unas hipótesis de investigación no merece la pena considerarse:

-*"Lo que se formaliza, es siempre una teoría"*

-*"Si el especialista no tiene nada en la cabeza (i.e., no hay teoría), no hay evidentemente nada que formalizar"*

-*"Si no se sabe lo que se busca, no hay ninguna posibilidad de encontrarlo"*[12]

Por qué, entonces, los ideólogos del big data realizan semejantes afirmaciones ¿por ignorancia? Puede que no sea así, pero la contundencia de algunas afirmaciones: "Con suficientes datos, las cifras hablan por sí mismas. Los petabytes nos permiten decir: "La correlación basta" (Mayer-Schönberger, V, Cukier, K., 2013:93), así como la ubicación académica y profesional de los autores, no deja lugar a demasiados optimismos. Tal vez deberíamos mirar en otra dirección: la construcción de un

---

[10] ANDERSON C. "The End of the Theory: The Data Deluge Makes the Scientific Method obsolete" Wired,v. 16 nº 7, 2008. Director de la Revista Wired. (http://www.wired.com/science/discoveries/magazine/16-07/pb_theory).

[11] Véase: ARRIBAS, J.M. *Historia de la probabilidad y la estadística VII,* AHEPE, Delta publicaciones, 2014.

[12] BARBUT, M, 1994: 5, 9. La crítica que la Escuela de Frankfurt hace de la sociología empírica americana tiene puntos en común con la crítica que hace Marc Barbut sobre la utilización de la estadística y los modelos matemáticos "sin teoría". Para los sociólogos de la Escuela alemana, la teoría de la sociedad procede de la filosofía, y del mismo modo que la filosofía sospecha de las apariencias, la teoría sociológica sospecha de la "fachada de la sociedad". Para T. Adorno, por ejemplo, la sociedad es más que la adición de hechos dispersos, la adición de hechos separados, en consecuencia, concluye, "la teoría es absolutamente necesaria y debe ser crítica" (ADORNO, T. 1973).

discurso legitimador de prácticas que proceden del campo empresarial y que están dando enormes réditos económicos a quienes los practican, ya sea en el campo de la modelización matemática aplicada a las finanzas, ya sea en el campo de los estilos de vida y el control de las prácticas de los consumidores:

> "*En la era de los datos masivos, ya no resulta eficiente tomar decisiones acerca de que variables examinar basándose únicamente en hipótesis (..) En lugar del enfoque sustentado por hipótesis, podemos emplear uno sustentado por datos (...) Las predicciones basadas en correlaciones son el corazón de los datos masivos*" (Mayer-Schönberger, V, Cukier, K., 2013:74-75)

Una de las diferencias fundamentales entre el modo como se construyó la teoría del muestreo y la época actual, la época de los *big data*, es que entonces se trabajaba para la administración pública, y la cuestión social todavía no estaba resuelta. Se trabajaba para el Estado o para grandes compañías de servicios públicos como telefonía, electricidad, comunicaciones, etc., la mayor parte de ellas nacionalizadas, ahora los técnicos del *big data* trabajan para grandes compañías privadas, o crean su propia empresa con el objeto de maximizar rápidamente el beneficio económico. Para Bowley o Hilton era fundamental conocer el número de parados en Inglaterra con objeto de organizar el subsidio de paro; para compañías como *Amazon*, lo fundamental es conocer lo hábitos y preferencias de los consumidores con objeto de organizar la demanda. A diferencia de objetos, diferencia de métodos.

Tal vez la excesiva valoración de los datos, tenga que ver con su valor mercantil, con lo que podríamos llamar la financiarización de los datos. Nuestros autores plantean explícitamente el valor de los datos, así como la valoración financiera de las compañías que los poseen:

> *"Calcular su valor ya no significará meramente sumar lo que se gana mediante su uso primario(...) la mayor parte del valor de la información está latente y surgirá de unos usos secundarios futuros (...).Esto se parece a los obstáculos que había para ponerles precio a los derivados financieros antes del desarrollo de la ecuación de Black-Scholes en la década de 1970 (..) colgarle una etiqueta con el precio al valor de la opción de datos representa, como mínimo, una espléndida oportunidad para el sector financiero»* (Mayer-Schönberger, V, Cukier, K., 2013:152)

Llegados a este punto, aparece ya el verdadero *leit motiv* del tratamiento de los datos masivos: su valor mercantil. Los datos son en realidad, derivados financieros, si no constituyen la base real de la investigación científica, si no tienen por finalidad la resolución de problemas ciudadanos, su utilización no requiere de demasiadas precauciones metodológicas o científicas, no es necesario complicarse la vida con la exactitud, ni con la validez, ni con los límites del error probable, pues al final lo que importa es la cuenta de resultados.

4. DEBATE

- A la luz de los diferentes usos y aplicaciones de las técnicas estadísticas a lo largo de la historia parece pertinente saber de qué estamos hablando cuando las utilizamos en un contexto académica o científico. Michel Foucault propuso el análisis del discurso científico para dominios como la medicina, la biología o la economía política pero también consideren necesario el análisis de las prácticas. Al análisis semiológico, o discursivo debe añadirse el *para qué* de las técnicas estadísticas, de lo contrario resulta difícil la comprensión del objeto. Es por ello que hemos propuesto como título de nuestra presentación "Por una arqueología del muestreo estadístico". Arqueología en homenaje a los trabajos de Michel Foucault que tanta influencia van a tener en la reciente historia de la ciencia, y muestreo estadístico porque su desarrollo teórico constituye un momento clave en la construcción de la moderna estadística matemática.

- Los primeros pasos de la estadística se producen a partir de los datos censales, y es en el contexto del debate positivista cómo la estadística adquiere el sentido de ciencia social, "construye" el hecho social. Dufau es anterior a Durkheim.

- La estadística matemática inicia su andadura con la regresión y la correlación, pero se consolidad con la teoría muestral. Las diferentes técnicas estadísticas han ido pasando por diferentes usos y han sido dominantes en determinados períodos históricos, por lo que resulta fundamental conocer los problemas que motivan su desarrollo, así como las circunstancias sociales y políticas.

- La aparición de las nuevas tecnologías e internet han vuelto la estadística hacia el análisis de datos masivos, haciendo que *n* sea igual a toda la población, pero sin el soporte teórico metodológico de la encuesta estadística. Las poderosas herramientas informáticas, así como el almacenamiento masivo de la información y el tratamiento a través de internet están modificando los usos de la estadística.

- Entre los teóricos del *Big Data* asistimos a un cambio de paradigma, que justifica sin rubor la inexactitud. Los criterios del análisis estadístico o de la producción de datos han pasado a ser financieros.

- Los teóricos del *Big Data Analysis* defienden la correlación como método pertinente para el análisis de grandes masas de datos, pero especialistas como Michel Armatte han mostrado cómo que es una técnica objeto de continua redefinición en la historia, cuyos usos cambian en función de los objetivos, de los acontecimientos tecnológicos y económicos.

BIBLIOGRAFÍA

ADORNO, T. (1973). "Sociología e investigación empírica", en ADORNO, T., POPPER, W. *La disputa del positivismo en la sociología alemana*, Barcelona: Grijalbo.

ALONSO, L.E. y FERNANDEZ RODRIGUEZ C.J. (eds.) (2012). *La financiarización de las relaciones salariales*, La catarata.

ARMATTE, M. (2001). "L'statut changeante de la correlation en econometrie (1910-1944)". *Revue Economique*, Vol. 52, nº 3, May 2001.

ARMATTE, M. (2004). "La introducción en Francia de los métodos de sondeo aleatorio", *Empiria*, nº 8, 2004 (http://revistas.uned.es/index.php/empiria/article/view/980/897).

ARRIBAS, J.M. (2004). "Les débuts de la statistique mathématique en Espagne (1914-1936)", *Mathématiques et Sciences Humaines*, nº 166, CAMS. École des Hautes Études en Sciences Sociales, París (http://msh.revues.org/2895).

BARBUT, M (1994). "Sur la formalisation dans les sciences sociales", *Histoire&Mesure*.

BOWLEY, A.L. (1910). *Sampling (an elementary manual of statistics).* Sección "Texto clásico", *Empiria*, nº 10, julio-diciembre 2005. (http://e-spacio.uned.es/revistasuned/index.php/empiria/article/view/1049/965).

— (1936): La aplicación del muestreo a los problemas económicos y sociológicos. *Empiria* nº 5 (http://e-spacio.uned.es/revistasuned/index.php/empiria/article/view/918/839).

DOLE, A. I., KOTZ, S. (2011). "Arthur L. Bowley. A Pioneer in Modern Statistics and Economics", *World Scientific*.

DESROSIÉRES, A. (2004). *La política de los grandes números*. Editorial Melusina, Barcelona.

DIDIER, E. (2009). "En quoi consiste l'Amerique? Les statistiques", le *New Deal* et la démocratie, Paris, Editions la découverte.

FOUCAULT, M. (2008). *L'Arqueologie du savoir*. Tel Gallimard.

MAYER-SCHÖNBERGER, V. y CUKIER, K. (2013). *Big data (La revolución de los datos masivos)*. Turner Noema.

MESPOULET, M. (2004). "La edad de oro del sondeo en Rusia (1885-1924)", *Empiria*, nº 7, (http://revistas.uned.es/index.php/empiria/article/view/965/884).

OGBURN, W.F. (1929). "The folkways of a scientific sociology", *Empiria*, nº 17. (http://e-spacio.uned.es/revistasuned/index.php/empiria/article/view/1992/1867).

YULE, G.U. (1909). "Les applications de la méthode de corrélation aux statistiques sociales et économiques", BIIS, tome XVIII, N°1, C.R. de la XIIème session de Paris, pp. 265-277.

CAPÍTULO 4

W. S. GOSSET O LA *T* DE STUDENT. UN GENEROSO LEGADO A LA INFERENCIA ESTADÍSTICA

CONSUELO BORRERO GALLEGO
CRISTINA CAMÚÑEZ DÍAZ
ANA SOLTERO DÍAZ
Universidad de Sevilla

1. INTRODUCCIÓN

William Sealy Gosset publicó en 1908, en la revista *Biometrika*, dos trabajos: uno titulado *El Error Probable de una Media*, y el otro, *El Error Probable del Coeficiente de Correlación*, ambos firmados con el seudónimo de Student. El primero de ellos es considerado el origen de lo que hoy día es conocido como distribución *t* de Student, tan utilizada en cualquier contexto de inferencia estadística, siendo este trabajo considerado como "una de las contribuciones seminales a la estadística del siglo XX" (Lehmann, 1992).

Gosset nace en 1876 en Canterbury, y estudia químicas y matemáticas en el New College, de Oxford. Cuando termina sus estudios universitarios es contratado por Arthur Guinness, Son & Co. como fabricante de cervezas para la sede St. James' Gate de Dublín, donde trabajó desde 1899 hasta 1935. En esa época, Guinness se interesó por la contratación de científicos que aplicasen sus conocimientos en el proceso de elaboración de la cerveza, y la contratación de Gosset no decepcionó a la empresa. Tal vez por temor a perder su ventaja competitiva, la empresa cervecera estableció la regla por la que prohibía a sus científicos la publicación de sus investigaciones. Gosset argumentó que sus trabajos no aportarían beneficio alguno a otros fabricantes de cerveza y finalmente le fue permitido que publicara bajo seudónimo (Student), para evitar que se dieran cuenta otros empleados de la empresa. Hotelling

(1930) señala que otros dos químicos de la cervecera también publicaron trabajos estadísticos bajo los seudónimos *Sophister* y *Mathetes*.

En 1904 Gosset escribió un informe interno titulado *The Application of the Law of Error to the Work of the Brewery*, donde ya introduce metodologías estadísticas en la fabricación de cerveza. En 1906 consiguió una licencia para ausentarse de la fábrica cervecera y así poder estudiar en el laboratorio biométrico de Karl Pearson. Allí estuvo dos años, 1906 y 1907. Durante este tiempo aprendió sobre teoría de distribuciones y sobre el coeficiente de correlación. Sin embargo, la teoría sobre grandes muestras, en la que también se formó, no encontraba aplicabilidad práctica en su trabajo de cervecero. Rara vez disponía de muestras de tamaño apropiadamente "grande" que satisficieran los supuestos de estos métodos. Esta falta de metodología para pequeñas muestras fue la que indujo su trabajo más relevante y famoso.

El primer artículo de Gosset (de un total de 22 que publicó) fue una aplicación de la ley de Poisson al recuento de la levadura y el error de muestreo asociado a dicho recuento (Student, 1907). Su trabajo sobre *El error de muestreo de una media* (el objeto de este estudio nuestro), y el del coeficiente de correlación, fueron publicados al año siguiente. Cox (2001) comentó que estos tres documentos estadísticos y los demás publicados por Gosset, "tienen, como a menudo se ha señalado, una frescura sorprendente y modernidad, derivada quizá de su concisión y su capacidad para obtener resultados estadísticamente significativos con matemáticas simples."

Gosset trabajó para los señores Guinness durante el periodo 1899-1935 en Dublín, y desde 1935 hasta 1937 en Londres. Falleció a los 61 años, en 1937. Desde su muerte, la influencia de su trabajo, y sus relaciones con los principales estadísticos de su tiempo, han sido muy consideradas. A pesar de que existe una extensa documentación, y de la naturaleza fundamental de la obra, los libros de texto de estadística de hoy día le prestan poca atención, o ninguna, al artículo de 1908. En lo que sigue, tratamos de examinar el artículo con algún detalle. Ponemos de relieve las simulaciones de Gosset, y pensamos en cómo podría haberlas realizado si hubiera tenido acceso al software estadístico de hoy. Sobre este artículo de Gosset, E. S. Pearson (1939), comenta:

Se trata de un artículo para el que creo que todos los estudiantes de investigación en estadística bien podrían ser dirigidos, sobre todo antes de intentar plantear su propio primer artículo. La derivación real de las distribuciones de s^2 y z, o de $t = z\sqrt{n-1}$ en la terminología de hoy, hace mucho que se ha hecho más sencilla y precisa; este tratamiento analítico no tiene por qué ser examinado cuidadosamente, pero hay algo en la disposición y ejecución del artículo que siempre compensa el estudio.

2. SOBRE EL TÍTULO Y LA INTRODUCCIÓN DEL ARTÍCULO DE 1908

Welch publicó en 1958, con motivo del 50 aniversario de la publicación del trabajo de Gosset, un artículo en el que comenta sobre el significado de la expresión “error probable” para lo que usa una definición de 1892. En Verduin (2015) podemos encontrar algunos usos y significados anteriores de esa expresión. Como escriben Hanley, A. *et al.* (2008), seguramente el significado sería “estadísticamente incorrecto” en la actualidad. Volviendo a Welch (1958), éste nos informa “que un gran número de libros sobre reducción de observaciones fueron escritos en las últimas décadas del siglo XIX, la mayoría de ellos con el objetivo de ilustrar y así hacer más accesibles los métodos computacionales muy generales publicados por Gauss entre 1821 y 1826. Su objetivo era mostrar cómo obtener a partir de observaciones científicas estimaciones de las cantidades físicas junto con indicaciones de su fiabilidad”. Se había convertido en habitual expresar la precisión en términos de “errores probables” y la mayoría de los autores hacían por lo menos un breve intento de decir cómo un “error probable” debe interpretarse en términos de la teoría de la probabilidad. Entonces nos presenta como ejemplo un texto de W. W. Johnson de 1892 de donde extrae el siguiente párrafo:

> *El error probable de un resultado final se escribe con frecuencia después con los signos ±. Por lo tanto, si la determinación final de un ángulo se da como 36º 42’ 0.3 ± 0.22”, el significado es que el verdadero valor del ángulo tiene exactamente las mismas probabilidades de estar entre los límites asignados de esta manera (es decir, entre 36º 41’ 0,08” y 36º 43’ 0.52”), como lo es para quedar fuera de estos límites.*

Al considerar esta definición de igual probabilidad que un “verdadero” valor se encuentre dentro o fuera del rango asignado, investigadores sobre la teoría de errores casi siempre tenían en mente una hipotética repetición a largo plazo que constase no sólo de los resultados que se podría obtener repitiendo las mediciones en la misma verdadera cantidad, sino también mediante la medición de otras cantidades reales de naturaleza similar. De este conjunto global de repeticiones hipotéticas uno podría entonces, en teoría, llevar a cabo la construcción de un subconjunto para el que las mediciones son idénticas a las que realmente se realizaron en la investigación que se examina. La afirmación que se hacía, entonces, era que, en este subconjunto, en el 50 por ciento de las ocasiones la cantidad real que se mide estará en el rango calculado con ayuda de la fórmula del error probable.

Hanley, A. *et al.* (2008), opinan en virtud de la lectura de su propio trabajo, que el “error probable” estudiado por Gosset es la desviación media estimada de la distribución muestral de la media muestral $\bar{X}$, cuando $X \sim N(\mu,\sigma)$.

Gosset comenzó explicando en su introducción que el “método usual de determinar la probabilidad de que la media de la población [μ] se encuentra dentro de una distancia dada de la media de la muestra [$\bar{X}$], es suponer una distribución normal alrededor de la media de la muestra con una desviación estándar igual a $s/\sqrt{n}$, donde s es la desviación estándar de la muestra, y usar las tablas de la probabilidad integral [Normal]", es decir, asumir $\mu \sim N\left(\bar{X}, s/\sqrt{n}\right)$. Pero, con n pequeño, el valor de s "acaba por sí mismo sujeto a un error cada vez mayor, hasta que los juicios alcanzados de esta manera pueden llegar a ser totalmente engañosos." "En algunos experimentos químicos, muchos biológicos, y la mayoría de experimentos agrícolas y a gran escala", estamos obligados a "juzgar sobre la incertidumbre de los resultados a partir de una pequeña muestra, que a su vez proporciona la única indicación de la variabilidad". Los métodos inferenciales para tales experimentos a pequeña escala habían estado "hasta ahora fuera del rango de la investigación estadística". En lugar de simplemente quejarse, Gosset hace algo al respecto.

> *Aunque es bien sabido que el método de utilización de la curva normal sólo es fiable cuando la muestra es "grande", nadie todavía nos ha dicho con claridad dónde está el límite entre muestras "grandes" y "pequeñas" que serán extraídas. El objetivo del presente trabajo es determinar el punto en el que podemos utilizar las tablas de la probabilidad integral (Normal) para juzgar sobre la importancia de la media de una serie de experimentos, y proporcionar tablas alternativas para su uso cuando el número de experimentos es demasiado pequeño.*

A continuación, Gosset nos da un índice del contenido de su trabajo, el cual lo divide en nueve secciones:

I. Se determina la ecuación de la curva que representa la distribución de frecuencia de las desviaciones estándar de muestras extraídas de una población normal.

II. Se muestra que no hay tipo de correlación entre la media y la desviación estándar de una muestra tal.

III. Se determina la ecuación de la curva que representa la distribución de frecuencia de una cantidad z, que se obtiene dividiendo la distancia entre la media de una muestra y la media de la población por la desviación estándar de la muestra.

IV. La curva encontrada en I es analizada.

V. La curva encontrada en III es analizada.

VI. Las dos curvas son comparadas con algunas distribuciones reales.

VII. Las tablas de las curvas encontradas en III son dadas para muestras de diferente tamaño.

VIII. y IX. Las tablas se explican y se le dan uso en algunos casos.

X. Conclusiones.

E. S. Pearson (1939: 221-222) quedó impresionado por la forma en que Gosset organizó su trabajo. Sugirió que "pioneros en el arte de la composición" siguen el patrón de nuestro autor: “primero diga lo que vaya a decir, y luego decirlo y finalmente terminar diciendo lo que usted ha dicho”.

3. LAS PRIMERAS SECCIONES DEL TRABAJO

Gosset definió s^2 como la suma de desviaciones al cuadrado dividida por n más que por $n-1$ que sería un estimador insesgado de σ^2: la decisión de dividir por n estuvo influenciada por su profesor, Karl Pearson. Gosset hubiera preferido usar $n-1$: él escribe a un colega de Dublín en mayo de 1907: “Cuando sólo tienes un número muy pequeño, creo que la fórmula con el divisor $n-1$ que solíamos utilizar es mejor”. Incluso en 1912, Karl Pearson comentó que hay poca diferencia si la suma de los cuadrados se divide por n o por $n-1$, “¡porque sólo los cerveceros traviesos toman n tan pequeño que la diferencia no es del orden del error probable!” (Pearson, 1939).

Gosset derivó y tabuló la distribución de $z=(\bar{X}-\mu)/s$ más que la de $(\bar{X}-\mu)/(s/\sqrt{n})$. Él utilizó la distribución de z para hacer afirmaciones de probabilidad en relación con μ y, por lo tanto, le pudo haber parecido más natural para él expresar la distancia entre μ y un valor de interés, por ejemplo, 0, como un múltiplo de s, de la misma manera que expresamos hoy el tamaño del efecto.

Encontró la distribución de z en tres pasos. En la Sección I va obteniendo los cuatro primeros momentos de s^2. Se da cuenta que coinciden con los de una curva de Pearson del Tipo III, y concluye: “es probable que esa curva represente la distribución teórica de s^2.”

Entonces, “aunque no tenemos ninguna prueba real, supondremos que así es en lo que sigue”. A partir de esto, construye la función de densidad de probabilidad de s por el método habitual de cambio de variable; pero en lugar de utilizar términos técnicos, lo plantea de manera más intuitiva: “ya que la frecuencia de s es igual a la de s^2, lo único que debemos hacer es comprimir la línea base (eje) de forma adecuada”. La curva que define esa función de densidad viene dada por:

$$y=\frac{N}{(n-3)(n-5)\cdots 3\cdot 1}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{n}{\sigma^2}\right)^{\frac{n-1}{2}} x^{n-2}e^{-\frac{nx^2}{2\sigma^2}} \qquad \text{(para } n \text{ par)}$$

o

$$y=\frac{N}{(n-3)(n-5)\cdots 4\cdot 2}\left(\frac{n}{\sigma^2}\right)^{\frac{n-1}{2}} x^{n-2}e^{-\frac{nx^2}{2\sigma^2}} \qquad \text{(para } n \text{ impar)}$$

En la sección II quiere demostrar “que no hay correlación entre (a) la distancia de la media de una muestra a la media de la población y (b) la desviación estándar de una muestra con distribución normal"; presumiblemente se refería a que los dos son independientes.

Como afirman Hanley, A. *et al.* (2008), su demostración es incompleta: argumentó que, dado que los valores positivos y negativos de $\bar{X}-\mu$ son igualmente probables, no puede haber una correlación entre el valor absoluto de $\bar{X}-\mu$ y s. El resultado se da en el caso normal, pero su argumento es válido sólo si se omite la palabra "absoluto". Como señaló Fisher (1925, p. 92), Gosset hace la demostración, usando los momentos más altos de la distribución normal, que la covarianza entre $\left(\bar{X}-\mu\right)^2$ y s^2 es cero.

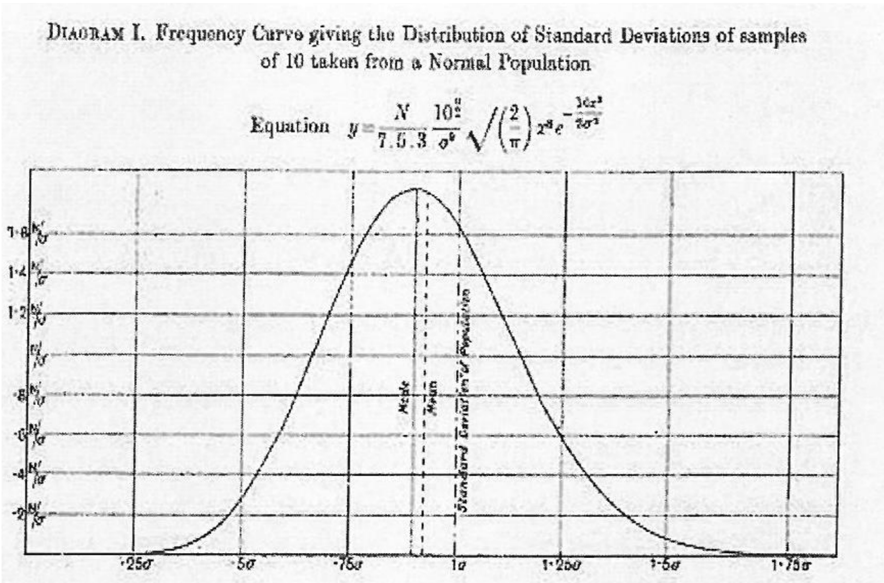


Figura 1. Gráfica de la función de densidad de probabilidad de *s* para una muestra de tamaño 10.

En la Sección III se dedica a "encontrar la ecuación que representa la distribución de frecuencias de las medias de las muestras de *n* extracciones de una población normal, siendo la media expresada en términos de la desviación estándar de la muestra". O sea, obtiene la función de densidad de probabilidad de *z*: comienza construyendo la distribución conjunta de $\{\bar{X}, s\}$, la transforma a la de $\{z, s\}$, y finalmente integra sobre *s* para obtener la función de densidad buscada:

$$y=\frac{1}{2}\cdot\frac{n-2}{n-3}\cdot\frac{n-4}{n-5}\cdot\ldots\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{2}\left(1+z^2\right)^{-\frac{n}{2}} \quad \text{si } n \text{ es impar,}$$

$$y=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{n-2}{n-3}\cdot\frac{n-4}{n-5}\cdot\ldots\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{1}\left(1+z^2\right)^{-\frac{n}{2}} \quad \text{si } n \text{ es par.}$$

Las secciones IV y V se dedican a los momentos, formas y áreas de la cola de las distribuciones de *s* y distribuciones *z*, presentando gráficamente la curva asociada a *s* para una muestra de tamaño 10.

4. LOS CÁLCULOS DE GOSSET USANDO VALORES MUESTRALES

Una aportación muy importante de Gosset es la sección VI, donde las funciones de densidad de probabilidad de *s* y *z* "se comparan con algunas distribuciones reales" para "testar de manera práctica las ecuaciones anteriores." A pesar de que podría haber utilizado uno de los métodos de simulación estocástica conocidos en ese momento (por ejemplo, dados, cartas…) Gosset, se muestra como un científico que trabaja únicamente con datos reales, eligiendo entonces una población existente. Él nos dice:

> Antes de haber tenido éxito en la solución de mi problema analíticamente, había tratado de hacerlo de forma empírica. El material utilizado era una tabla de correspondencias que contiene alturas y mediciones del dedo medio izquierdo de 3.000 criminales, de un artículo de W. R. Macdonell (*Biometrika*, Vol. I, p. 219). Las mediciones fueron escritas sobre 3.000 trozos de cartón, que luego se barajaron y extraídos al azar. Cuando cada tarjeta fue extraída sus números fueron escritos en un libro que, de este modo, contiene las mediciones de 3.000 delincuentes en un orden aleatorio. Por último, cada conjunto consecutivo de 4 extracciones se tomó como una muestra (750 en total) y media, desviación estándar, y correlación de cada muestra fueron calculadas. A continuación, la diferencia entre la media de cada muestra y la media de la población se divide por la desviación estándar de la muestra, que nos da la *z* de la Sección III. Esto nos proporciona dos conjuntos de 750 desviaciones estándar y dos conjuntos de 750 valores de *z* con los que poner a prueba los resultados teóricos alcanzados.

Los datos de MacDonell, obtenidos de la Oficina Central de Metric, New Scotland Yard, fueron presentados como una tabla de frecuencias 42×22 (versión electrónica en www.epi.mcgill.ca/hanley/Student). Las 42 filas para las longitudes de los dedos se corresponden directamente con las medidas reales, tomadas al milímetro, por lo que los intervalos de agrupación son de 0,1 cm de ancho. Las mediciones de las alturas fueron redondeadas a 1/8 de pulgada por el personal de Scotland Yard, pero agrupados por Macdonell en 22 intervalos, cada uno de 1 pulgada de ancho y conteniendo los registrados entre *x* y 5/8 de pulgadas y (*x* + 1) y 1/2 pulgadas. La media (en pulgadas) se estimó como 65,5355 ± 0,0313, siendo esto último el error probable, es decir, $0{,}6745 \times sd/\sqrt{3000}$. La desviación estándar *sd,* fue calculada usando $n = 3000$ como divisor, estimándose como 2,5410 ± 0,0221, siendo esto último $= 0{,}6745 \times sd/\sqrt{2n}$.

Al tomar muestras de tamaño 4, Gosset se encuentra de vez en cuando con que las cuatro personas son del mismo intervalo en la tabla original, por lo que las desviaciones típicas muestrales en esos casos toman el valor cero, con lo que los correspondientes valores de *z* tomarían el valor infinito. Gosset entonces cambia ese valor infinito para el mayor valor observado. Llevó a cabo comparaciones entre los valores observados y teóricos, usando el estadístico χ^2 como instrumento de comparación. Las siguientes figuras muestran algunas de las tablas presentadas por Gosset para valorar el ajuste

Comparison of Fit. Theoretical Equation: $y = \frac{2N}{\pi}\cos^4\theta,\ z = \tan\theta$

Scale of z															
Calculated frequency	5	9½	13½	34½	44½	78½	119	141	78½	44½	34½	13½	13½	9½	5
Observed frequency	9	14½	11½	33	43½	70½	119½	151½	122	67½	49	26½	16	10	6
Difference	+4	+4	−2	−2	−1½	−1	−8	+½	+10½	+3	−11	+4½	−8	+2½	+½

Whence $\chi^2 = 12.44,\ P = 0.56.$

Figura 2. Prueba de ajuste de la z muestral.

Comparison of Fit. Theoretical Equation: $y = \frac{16\times 750}{\sqrt{(2\pi)}\sigma^2}x^2 e^{-\frac{2x^2}{\sigma^2}}$

Scale in terms of standard deviations of population	1½	10½	27	45½	64½	78½	87	88	81½	71	58	45	33	23	15	9½	5½	7
Calculated frequency	2	14	27½	51	64½	91	94½	68½	65½	73	48½	40½	42½	20	22½	12	5	7½
Observed frequency	+½	+3½	+½	+5½	—	+12½	+7½	−19½	−16	+2	−9½	−4½	+9½	−3	+7½	+2½	−½	+½

Whence $\chi^2 = 21.80,\ P = 0.19.$

Figura 3. Prueba de ajuste de la *x* muestral.

5. LAS RESTANTES SECCIONES DEL ARTÍCULO DE 1908

Gosset estaba tan suficientemente convencido por sus simulaciones que en la sección VII presentó la tabulación de la distribución *z* para $n \le 10$, y explicó su uso en la sección VIII.

Section VII. Tables of

$$\frac{n-2}{n-3}\cdot\frac{n-4}{n-5}\cdots\left(\begin{array}{l}\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\, n \text{ odd}\\ \frac{2}{1}\cdot\frac{1}{\pi}\, n \text{ even}\end{array}\right)\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\tan^{-1}z}\cos^{n-2}\theta\, d\theta$$

for values of n from 4 to 10 inclusive

Together with $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{(2\pi)}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{7x^2}{2}}dx$ *for comparison when* $n = 10$

$z\left(=\frac{x}{s}\right)$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=9$	$n=10$	For comparison $\left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{(2\pi)}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{7x^2}{2}}dx\right)$
0.1	0.5633	0.5745	0.5841	0.5928	0.6006	0.60787	0.61462	0.60411
0.2	0.6241	0.6458	0.6634	0.6798	0.6936	0.70705	0.71846	0.70159
0.3	0.6804	0.7096	0.7340	0.7549	0.7733	0.78961	0.80423	0.78641
0.4	0.7309	0.7657	0.7939	0.8175	0.8376	0.85465	0.86970	0.85520
0.5	0.7749	0.8131	0.8428	0.8667	0.8863	0.90251	0.91609	0.90691
0.6	0.8125	0.8518	0.8813	0.9040	0.9218	0.93600	0.94732	0.94375
0.7	0.8440	0.8830	0.9109	0.9314	0.9468	0.95851	0.96747	0.96799
0.8	0.8701	0.9076	0.9332	0.9512	0.9640	0.97328	0.98007	0.98253
0.9	0.8915	0.9269	0.9498	0.9652	0.9756	0.98279	0.98780	0.99137
1.0	0.9092	0.9419	0.9622	0.9751	0.9834	0.98890	0.99252	0.99820
1.1	0.9236	0.9537	0.9714	0.9821	0.9887	0.99280	0.99539	0.99926
1.2	0.9354	0.9628	0.9782	0.9870	0.9922	0.99528	0.99713	0.99971
1.3	0.9451	0.9700	0.9832	0.9905	0.9946	0.99688	0.99819	0.99986
1.4	0.9451	0.9756	0.9870	0.9930	0.9962	0.99791	0.99885	0.99989
1.5	0.9598	0.9800	0.9899	0.9948	0.9973	0.99859	0.99926	0.99999
1.6	0.9653	0.9836	0.9920	0.9961	0.9981	0.99903	0.99951	
1.7	0.9699	0.9864	0.9937	0.9970	0.9986	0.99933	0.99968	
1.8	0.9737	0.9886	0.9950	0.9977	0.9990	0.99953	0.99978	
1.9	0.9970	0.9904	0.9959	0.9983	0.9992	0.99967	0.99985	
2.0	0.9797	0.9919	0.9967	0.9986	0.9994	0.99976	0.99990	
2.1	0.9821	0.9931	0.9973	0.9989	0.9996	0.99983	0.99993	
2.2	0.9841	0.9941	0.9978	0.9992	0.9997	0.99987	0.99995	
2.3	0.9858	0.9950	0.9982	0.9993	0.9998	0.99991	0.99996	
2.4	0.9873	0.9957	0.9985	0.9995	0.9998	0.99993	0.99997	
2.5	0.9886	0.9963	0.9987	0.9996	0.9998	0.99995	0.99998	
2.6	0.9898	0.9967	0.9989	0.9996	0.9999	0.99996	0.99999	
2.7	0.9908	0.9972	0.9989	0.9997	0.9999	0.99997	0.99999	
2.8	0.9916	0.9975	0.9989	0.9998	0.9999	0.99998	0.99999	
2.9	0.9924	0.9978	0.9989	0.9998	0.9999	0.99998	0.99999	
3.0	0.9931	0.9981	0.9989	0.9998	—	0.99999	—	

Figura 4. Tablas de integrales acumuladas para diferentes tamaños muéstrales.

En la sección IX, ilustra el método, usando tres ejemplos totalmente trabajados, todos del tipo "*t*-emparejados", con *n* de 10, 6, y 2. Concluye con "un ejemplo que viene más allá del rango de las tablas, siendo aquí $n=11$ experimentos", con $\bar{d}=33{,}7$ y $s=63{,}1$. Para ello utiliza la aproximación $\Delta \sim N\left(\bar{d}, s/\sqrt{n-3}\right)$ para llegar a la conclusión de que existe una probabilidad de 0,934 de "que la semilla de cebada secada al horno da un rendimiento de cebada superior a la semilla no secada en horno": La tabla *z* ampliada que publicó en 1917 presenta una probabilidad exacta de 0,939.

E.S. Pearson nos dice que "se utilizó la prueba z en la fábrica de cerveza al menos una vez, pero creo que muy poco en otra parte durante probablemente una docena de años." De hecho, en 1922, cuando Gosset envió Fisher una copia de sus nuevas tablas, bromeó diciendo que "usted es el único hombre que es propenso a usarlas" [citado por Box (1981)].

6. LA CORRESPONDENCIA GOSSET-FISHER

Fisher comenzó correspondiendo con Gosset en 1912, con una carta en la que le comunica una rigurosa derivación geométrica de la distribución *z* de "Student" en términos de transformaciones en un espacio euclídeo *n*-dimensional. Esta carta está perdida pero su naturaleza se desprende de la carta de presentación con la que Gosset se la pasó a Pearson, con la sugerencia de que Pearson "podría si lo desea ponerlo en una nota" en Biometrika ya que es tan agradable y matemática que podría llamar la atención a algunas personas. La carta de Gosset ha sido reproducida en parte por E.S. Pearson (1968). Fisher publicó su derivación geométrica de la *z*-distribución de "Student" en 1923; y dos años después (1925b) en términos de $t = z\sqrt{n-1}$.

La primera carta de Gosset a Fisher que se ha encontrado hasta la fecha es del 15 de abril 1915 (Carta 1 de Gosset 1962; Pearson 1968), dando las gracias a Fisher por enviarle una reimpresión del artículo de Fisher en *Biometrika* (1915) sobre la distribución muestral del coeficiente de correlación *r* en muestras aleatorias de una población normal bivariada con coeficiente de correlación arbitrario ρ, y agregó que "estaba muy contento de que (su) problema se encontraba un paso más cerca a la solución". (Gosset había descubierto en 1908 ("Student" 1908b) que r es simétricamente distribuida alrededor del cero de acuerdo con una curva Tipo II de Pearson en muestras aleatorias de una población normal bivariada con $\rho=0$; y que, cuando $\rho \neq 0$ su distribución es asimétrica, con la cola más larga hacia el cero, y no puede ser representada por ninguna de las curvas de Pearson.) Fue en este trabajo de 1915 cuando ese poderoso método geométrico de Fisher para derivar distribuciones en el muestreo de importantes funciones estadísticas se hizo público por primera vez. Gosset no hace comentario sobre la observación de Fisher de que cuando $\rho=0$, la ratio $r\big/\sqrt{1-r^2}$ se distribuye según la *z* de Gosset, con *n* reemplazado por $n-1$.

Sobre el 3 de abril de 1922, Gosset escribe en una carta a Fisher, "Pero en serio quiero conocer la distribución de frecuencias de la $r\left(\sigma_x/\sigma_y\right)$, para muestras pequeñas, para mi trabajo pues la prefiero más que la distribución de *r* ahora felizmente resuelta" (Carta 5 de Gosset 1962). Sobre el 12 de abril de 1922 añade "Me olvidé plantearle a usted otro problema en mi última carta, la del problema del error de los coeficientes parciales de $\left\{\begin{matrix}\text{correlación}\\ \text{regresión}\end{matrix}\right\}$ para pequeñas muestras" (Carta 6).

Fisher, evidentemente, respondió rápidamente a la necesidad del Gosset "con una carta en la que mostró cómo la distribución muestral del coeficiente de regresión de la muestra, *b* ($=r\left(s_x/s_y\right)$), donde s_x y s_y son las desviaciones estándar de los *n* valores de la muestra de *x* e *y*, respectivamente), podrían ser expresadas en términos de *z*-distribution de Gosset, cuando se consideran los valores de *x* como fijos y, para un valor dado de *x*, los valores correspondientes de *y* son normal e independientemente distribuidos alrededor de un $\alpha+\beta\left(x-\bar{X}\right)$ con una desviación estándar común σ. Esta carta se ha perdido. Gosset reconoció su recepción en una carta de 5 de mayo de 1922, destacando:

De todos modos, en cuanto al factor de regresión del resultado neto parece ser que, si se utiliza la fórmula aceptada para SD, debe hacerlo exactamente como se utiliza el SD aceptado de una media, y con un pequeño número deben usar las Tablas de Student: ¡que es, por supuesto, muy satisfactorio para Student!

La fórmula ordinaria debe haber sido deducida bajo el supuesto en que el SD para los valores dados de *x* se requiere…

No se me había ocurrido poner a prueba la importancia de dos medios de diferentes muestras de tamaño por mi Curva Tipo VII, ni he tenido tiempo (ni ganas) para tratar de averiguar cómo hacerlo, ya que llegó su carta, pero probablemente podría conseguir el trabajo de tabulación de su integral hecho con bastante facilidad, aunque sí sobre se debería permitir publicar la obra del hombre que consiga hacerlo es otra cosa.

Me sorprende que el efecto de tomar una correlación parcial o regresión es sólo para disminuir el peso en un caso, pero veo que está en línea con otros fenómenos de la naturaleza.

Está claro que Fisher ya había llegado a su tratamiento unificado de los test de significación de una media, de la diferencia entre dos medias, y de coeficientes simples y parciales de correlación y regresión en términos de la distribución "de Student"; y puede que ya haya decidido que sería ventajoso cambiar *z* por

$$t=z\sqrt{\nu} \tag{2}$$

donde ν es el "número de grados de libertad" inherente a la "suma de cuadrados" implicada, por cuanto se refiere Gosset "para la tabulación de su integral".

7. EL DEBUT DE LA *T* DE STUDENT

La *t* de Student parece que hace su primera aparición en público en *Statistical Methods for Research Workers* (1925) de Fisher[1]: las ecuaciones que dan la versiones *t* de las de z, y de la z para testar la significación $(b_i - \beta_i)$ en el caso de una ecuación de regresión múltiple ($i = 1, 2, ..., p$) se encuentran en las Secciones 24, 26 y 29 de su libro; con n' (mayor que n) usado para denotar el tamaño muestral implicado; y la distribución en el muestreo de estas y otras *t* son derivadas de nuevo de los primeros principios en sus "Aplicaciones de la Distribución de Student" (Fisher, 1925). En su artículo Fisher deja bastante claro que la ratio de cualquier cantidad *d* normalmente distribuida alrededor de cero con desviación estándar σ, a una estimación *s* de σ tal que $\frac{\nu s^2}{\sigma^2}$ se distribuye independientemente de *d* como una χ^2 con ν grados de libertad, se distribuye como una *t* de Student con ν grados de libertad. (Fisher usa n' para denotar el tamaño muestral y n para los grados de libertad, pero en la medida en que n es con frecuencia usado para el tamaño muestral, el posible malentendido se evita en la práctica actual con la utilización de "ν" para denotar el número de grados de libertad.) El cambio de la *z* a la *t* correspondiente es consecuentemente efectuado mediante la simple sustitución de la "suma de los cuadrados" bajo el signo radical en el denominador de una *z* por el correspondiente "cuadrado medio"; es decir, la suma dividida, no por el número de términos (*n* o *n*') que participan, sino más bien por el "número de sus grados de libertad" (ν), de modo que cada *t* se relaciona con la *z* correspondiente por la ecuación $t = z\sqrt{\nu}$; es decir, la ecuación (2) de arriba.

8. LA TRANSICIÓN DE *Z* A *T*

De un número de cartas de Gosset a Fisher de 1922 está claro que, para ese año, Fisher ya había encontrado más conveniente *t* que *z* para usar y explicar, y decidió preparar, o hacer arreglos para la preparación de, tablas de la integral de curvas Tipo VII de Pearson en la forma de distribución *t* similares a las tablas de la integral de la distribución *z* de Gosset. Así, Gosset posiblemente se refería a la integral de la distribución *t* cuando escribe que "probablemente podría realizar el trabajo de tabulación de su integral" en su carta de 5 de mayo de 1922, citada anteriormente. El 12 de octubre de 1922, él escribió, "aún no he tenido tiempo de hacer nada con el tipo VII" (Carta 12). Luego, Gosset en su carta a Fisher de 7 de noviembre de 1922, muestra la primera mención explícita de "*t*": "He estado trabajando un poco en el Tipo VII ...

[1] Fisher presenta su definición general de *t* de Student y su relación a su *z* ($t^2 = e^{2z}$ para $n_1 = 1$ y $n_2 = n$ grados de libertad), en su discurso (Fisher, 1928) al Congreso Internacional Matemático de 1924, cuyo *Proceedings* no fue publicado hasta 1928.

En el curso de ese estudio calculé todos los valores para $t = 1$ a partir de $n = 2$ a $n = 30$ con siete cifras (una precisión de 6 decimales) "(Carta 13).

Evidentemente, Gosset estaba evaluando directamente la integral del desarrollo en serie trigonométrica que él había empleado en su trabajo de 1908; y Fisher estaba aplicando "fórmulas de corrección" a la correspondiente desviación normal. La carta 13 proporciona una comparación tabular de sus resultados numéricos "para $x = 1$" con 7 decimales para n, "el número en la muestra" (esto es, $\nu + 1$) desde 2 hasta 30. Los cálculos que llevaron a las tres tablas de "Student" (1925) se discuten en las cartas posteriores de Gosset a Fisher. En estas cartas posteriores, siempre utiliza "*t*" al referirse a sus propios cálculos, y usa "*x*" cuando se refiere a las "fórmulas correctivas" de Fisher. En el texto que acompaña a las tablas dice:

Desde entonces se ha demostrado, como en el documento anterior del Sr. Fisher [Fisher 1925b], que la integral tiene una aplicación mucho más amplia de lo que se suponía en un principio.

Las tablas publicadas hasta ahora sufren sin embargo de dos defectos: (i) que a medida que *n* aumenta la escala *z* se hace muy basta, y (ii) que, salvo en el caso para el que fue diseñado, *n*, el número de la muestra, no es el mejor número con el que entrar en la tabla, sino $n - 1$, el número de grados de libertad.

Las presentes tablas, por lo tanto, han sido construidas con la sugerencia del Sr. Fisher con el argumento $t = z\sqrt{n}$, donde *n* es ahora uno menos que el número de la muestra, lo que podemos llamar *n*. (Student 1925, pp. 105-106).

En resumen, lo anterior parece indicar que la decisión de cambiar *z* por *t* se originó con Fisher, pero la elección de la letra "*t*" para denotar la nueva forma se debió a Student.

9. CONCLUSIONES

El artículo de Student 1908 tiene varias lecciones para aquellos que nos iniciamos en el estudio de la estadística inferencial.

1. La preocupación y responsabilidad de la interpretación práctica de los datos experimentales.
2. Gran preparación en el manejo matemático, calculo integral y desarrollo en serie.
3. Manejos de datos reales para llevar a cabo sus simulaciones.
4. Manejos de gráficas y paciencia de cálculo en la construcción de tablas.
5. Buen conocimiento del test ji-cuadrado de bondad de ajuste.

6. Contactos con buenos maestros (Fisher) para mejorar los resultados de nuestras investigaciones.
7. Una manera excelente de presentar un artículo de investigación.

BIBLIOGRAFÍA

BOLAND, P.J. (1984). "A biographical glimpse of William Sealy Gosset". *The American Statistician* 38: 179-183.

BOX, J.F. (1981). "Gosset, Fisher, and the t distribution". *The American Statistician* 35: 61-66.

COX (2001). "Biometrika: The First 100 Years". *Biometrika*, 88, 3–11.

EISENHART, C. (1979), "On the Transition from Student's z to Student's t", *The American Statistician*, 33, 6-10.

FISHER, R. A. (1925), "Applications of 'Student's' Distribution," *Metron*, 5, 90–104.

FISHER, R. A. (1939). "Student". *Annals of Eugenics* 9: 1–9.

HANLEY, J. A., JULIEN, M., and MOODIE, E. E. M. (2008). "Student's *z, t,* and *s*: What if Gosset had R?", *The American Statistician,* Vol. 62, No. 1 1.

HOTELLING, H. (1930). "British statistics and statisticians today", *Journal of the American Statistical Association*, 25: 186-190.

LEHMANN (1992). *Breakthroughs in Statistics, Vol. II Methodology and Distribution*, New York: Springer-Verlag, pp. 29-32. JOHNSON, N. L. and KOTZ, S., (eds.), *Introduction to "Student (1908) The Probable Error of a Mean"*.

MCMULLEN, L. (1939). "Student as a man". *Biometrika*, 30: 205-210.

PEARSON, E. S. (1939). "Student as a statistician". *Biometrika*, 30: 210-250.

PEARSON, E. S. (1968), "Studies in the History of Probability and Statistics. XX: Some Early Correspondence between W.S. Gosset, R.A. Fisher and Karl Pearson, with Notes and Comments", *Biometrika*, 55, 445-457.

STUDENT (1907). "On the error of counting with a haemacytometer", *Biometrika*, 5: 351-360.

STUDENT (1908a). "The probable error of a mean", *Biometrika*, 6: 1-25.

STUDENT (1908b). "The probable error of a correlation coefficient". *Biometrika*, 6: 302-310.

STUDENT (1925). "New Tables for Testing the Significance of Observations", *Metron,* 5, 113-120.

VERDUIN, K. (2015), "Earliest Known Uses of Some of the Words of Probability & Statistics", *http://www.leidenuniv.nl/ fsw/ verduin/ stathist/1stword.htm,* (accessed June 30, 2015).

WELCH, B. (1958), "Student' and Small Sample Theory", *Journal of the American Statistical Association*, 53, 777-788.

CAPÍTULO 5

LA APORTACIÓN DE DALTON (1920) A LA MEDIDA DE LA DESIGUALDAD DE LA RENTA: ALGO MÁS QUE MEDIDA DE DISPERSIÓN

CRISTINA CAMÚÑEZ DÍAZ
ANA SOLTERO DÍAZ
CONSUELO BORRERO GALLEGO
Universidad de Sevilla

1. INTRODUCCIÓN

Hugh Dalton (1887-1962), economista y político británico. Fue miembro del Partido Laborista. Durante la década de los 30 del siglo XX definió la política exterior del partido, siendo partidario del rearme contra la amenaza alemana y, por tanto, oponiéndose enérgicamente a la política de apaciguamiento del primer ministro Neville Chamberlain, en 1938. Durante la segunda guerra mundial participó en el gobierno de coalición dirigido por Winston Churchill y, al concluir ésta, ocupó el cargo de Ministro de Hacienda durante el periodo 1945-47, teniendo que dimitir debido a las filtraciones del presupuesto a un periodista antes de ser debatido en la Cámara de los Comunes.

El nombre de Dalton aparece ligado a la literatura sobre medidas de desigualdad debido, principalmente, a un trabajo publicado en 1920 en *The Economic Journal* en el que investigó aspectos analíticos de las medidas de desigualdad de la riqueza. Dalton amplió de manera sustancial el trabajo de Max Otto Lorenz sobre estas medidas, ofreciendo una gama más extensa de medidas y un conjunto de principios que sirvieran para comprender los cambios que se pudieran producir en la distribución de la renta. A partir de una sugerencia de Pigou (1912, p. 24), Dalton propuso el conocido como "principio de transferencia" o, como ha sido conocido después, condición de Pigou-

Dalton, como una condición exigible a una "buena" medida de desigualdad. Sobre este trabajo de 1920, él se muestra años después algo crítico con el mismo, cuando escribió en sus memorias publicadas en 1953 el siguiente comentario:

> *"Tenía planeado, como parte final de mi Desigualdad de la Renta, una discusión bastante completa de la medición de la desigualdad de los ingresos y de la aplicación de diversas medidas rivales a las estadísticas disponibles. Pero este gran proyecto, que nadie ni siquiera aún ha llevado a cabo, se contrajo bajo la presión de mi calendario hasta convertirse en un pequeño artículo... Más bien una pieza ingeniosa de la escritura, sigo pensando que, con algunas decoraciones algebraicas y diferenciales y llamando la atención sobre algunos teoremas elegantes de economistas italianos poco conocidos, en los que, debido a mi conocimiento de la lengua, y buscando un rincón en el tiempo, hice revisión de algunos de ellos en el Economic Journal. Pero se basa en hipótesis que eran un poco irreales*" (1953, p. 107).

En este trabajo tratamos de describir el contenido de ese relevante artículo de Dalton, y decimos relevante si nos atenemos a las citas que el mismo ha generado, sobre todo a partir de la década de 1970.

2. RENTA Y BIENESTAR

Dalton considera la renta no como tal sino como determinante del bienestar. Así, al inicio de la lectura del artículo, Dalton critica a un escritor norteamericano (sin citar nombre) que había expresado la opinión "el problema estadístico ante el que se enfrenta el economista sobre la determinación de una medida de desigualdad en la distribución de la riqueza es idéntico al del biólogo en la determinación de una medida de desigualdad en la distribución de cualquier característica física". Pero, según su opinión, esto es claramente erróneo. Pues "el economista está interesado principalmente, no en la distribución de la renta como tal, sino en los efectos de la distribución de la renta sobre la distribución y cantidad total de bienestar económico, que puede derivarse de esa renta".

Bajo este contexto, por tanto, es necesario considerar dos variables, renta y bienestar, y tratar de describir las posibles relaciones funcionales existentes entre ambas.

Encuentra una analogía, aunque matiza que sólo parcial, con la medida de desigualdad de precipitaciones en una zona agrícola, y los efectos de la misma sobre las cosechas. Estaba muy claro que él estaba considerando medidas aplicables a la renta, no a otras variables económicas, y ciertamente no a la gran cantidad de diferentes variables evocada por Gini (1921) en su comentario sobre el trabajo de Dalton, y del que hablaremos más adelante.

A partir de aquí comienza a formular hipótesis sobre el comportamiento de la variable "bienestar económico" y su relación con la "renta" (teniendo en cuenta que la renta es una variable tangible, objetiva, medible, pero sobre cómo medir el bienestar aún no se ha pronunciado):

- El bienestar económico es aditivo. El bienestar social es la suma de los bienestares de los individuos que componen la sociedad.
- La relación entre renta y bienestar es la misma para todas las personas. Aunque no lo dice expresamente, considera el bienestar una función creciente de la renta.
- Para cada individuo, el bienestar económico marginal disminuye a medida que aumenta la renta. O sea, supone que el bienestar es una función creciente y cóncava de la renta.
- Si una riqueza total determinada se distribuyese entre un número concreto de personas, considera que el bienestar económico será máximo si el reparto es igualitario entre esas personas.

A partir de estas consideraciones es posible definir una medida de desigualdad: **la ratio entre el total de bienestar económico que se alcanza bajo una distribución igualitaria y el bienestar económico total alcanzado en virtud de la distribución dada**. Esta relación es igual a la unidad para una distribución igualitaria, y es mayor que uno para cualquier distribución desigual. Cuanto más se distancie de uno, mayor será el grado de desigualdad.

Teniendo presente esa propuesta de medida de desigualdad, Dalton opina que si se asume alguna relación funcional entre bienestar y renta, será fácil construir la medida. Ahora bien, mantiene que ninguna medida así construida será independiente de la particular relación funcional que se ha asumido. De alguna forma, mediante la relación funcional, Dalton quiere "medir" el bienestar a partir de la renta. Entonces propone dos posibles relaciones funcionales, que no tendrán mucho recorrido en su propio trabajo, pero que más tarde, Atkinson (1970) las incorporará como casos particulares de su medida de desigualdad. Las dos propuestas de Dalton las analizamos en el siguiente apartado.

3. DOS POSIBLES RELACIONES FUNCIONALES ENTRE BIENESTAR Y RENTA

En su primera propuesta, nuestro autor establece como hipótesis lo que sigue: establecida una renta de subsistencia, incrementos proporcionales de la renta que está por encima de la de subsistencia, implican incrementos absolutos iguales a los proporcionales del bienestar económico. Así, si w = bienestar económico y x = renta, tenemos

$$dw = \frac{dx}{x} \quad \text{o bien} \quad w = \log x + c\,.$$

Considerando *n* rentas individuales, $x_1, x_2, ..., x_n$ cuya media aritmética es x_a y la geométrica es x_g (x_a sería la renta de cada individuo en un reparto igualitario de la riqueza total), entonces la medida de desigualdad propuesta por Dalton tendría la forma $\frac{n \cdot \log x_a + nc}{n \cdot \log x_g + nc} = \frac{\log x_a + c}{\log x_g + c}$. Entonces, considera que, para simplificar la medida, se asume que cuando $x = 1$, $\omega = 0$, y entonces $c = 0$. Así, nuestra medida de desigualdad se convierte en $\frac{\log x_a}{\log x_g}$. A primera vista, el autor piensa que sería aún más simple, y prácticamente equivalente, la medida $\frac{x_a}{x_g}$, pero esta simplificación plantea un problema que más adelante señala, y que nosotros comentaremos.

Después de hacer esta primera propuesta, Dalton opina que la hipótesis de partida no es completamente satisfactoria. Aparte de la dificultad de sólo tener en cuenta la renta que está por encima de los ingresos de subsistencia, está el hecho de considerar que el bienestar crece en términos absolutos lo mismo que crece la renta en proporción, para cualquier nivel de renta. Opina que para niveles elevado de renta el incremento del bienestar es más lento, o, dicho de otra forma, para conseguir el mismo incremento de bienestar en rentas elevadas es necesario un incremento proporcional superior al valor del incremento absoluto (la idea de una relación de concavidad subyace en este pensamiento).

Entonces, "para ser tolerablemente realistas" piensa que una relación funcional que conecte bienestar y renta debe cumplir:

(1) Igual incremento en bienestar económico, en alguna tasa después que la renta sea mayor que una determinada cantidad, corresponderá con más que incrementos proporcionales en la renta;

(2) el bienestar económico tenderá a un límite finito, cuando la renta crece indefinidamente;

(3) el bienestar económico tenderá a cero para una cierta cantidad de renta, y será negativo para rentas pequeñas.

Dalton piensa que estas condiciones son satisfechas, si asumimos que la relación entre el bienestar económico y la renta es de la forma $d\omega = \frac{dx}{x^2}$, por lo que $\omega = c - \frac{1}{x}$, donde c es una constante. Entonces, aunque *x* se haga muy grande, ω nunca puede llegar a ser mayor que *c*, y cuando *x* es menor que $\frac{1}{c}$, ω es negativo. Opina que esta relación funcional reúne plausibilidad y simplicidad, y, por tanto, sería una relación realista. En ese caso, la correspondiente medida de desigualdad sería

$$\frac{nc - \frac{n}{x_a}}{nc - \frac{n}{x_h}} = \frac{c - \frac{1}{x_a}}{c - \frac{1}{x_h}}$$

donde x_h es la media armónica de las rentas individuales, y c, como ya se intuye por lo escrito arriba, el recíproco de la renta mínima, para el que empieza a producirse bienestar económico positivo.

Después de presentar estas dos propuestas, que las define "simples en la forma y con cierta elegancia teórica", Dalton duda de su aplicabilidad a las estadísticas de renta. Así, aunque la media aritmética es de fácil cálculo a partir de estadísticas perfectas, y es bastante fácil aproximarse a partir de estadísticas imperfectas, los correspondientes cálculos para las medias geométricas y harmónicas son muy laboriosos (estamos hablando de un trabajo publicado en 1920), cuando el número de rentas individuales es grande, y las correspondientes aproximaciones, especialmente para la media harmónica, son prácticamente imposibles, cuando las estadísticas muestran más que un pequeño grado de imperfección. Además, la primera de las dos medidas implica una estimación de la renta necesaria para la "subsistencia", y la segunda una estimación de la mínima renta que conduce a un bienestar económico positivo. Y ninguna de estas estimaciones es fácil de llevar a cabo.

Por tanto, como se ha dicho arriba, las dos medidas de desigualdad propuestas por nuestro autor tienen un corto recorrido en su exposición. A partir de aquí, Dalton analiza las medidas de dispersión más utilizadas en la época y las evalúa en función de unos principios exigibles a una medida de desigualdad.

4. EL PRINCIPIO DE TRANSFERENCIA Y LAS MEDIDAS DE DISPERSIÓN CLÁSICAS

El primer principio que Dalton establece, y que le sirve para testar la plausibilidad de una medida de desigualdad es el que él llamó "principio de transferencia", citando a Pigou (1912, *Wealth and Welfare*) en este punto:

> *Si sólo hay dos receptores de renta, y una transferencia tiene lugar desde el más rico al más pobre, la desigualdad disminuye. Hay, desde luego, una condición límite obvia. Pues la transferencia no debe ser tan grande, como para revertir las posiciones relativas de los dos receptores de renta, y producirá su máximo resultado, es decir, el de crear la igualdad, cuando la transferencia es igual a la mitad de la diferencia entre los dos ingresos. Y con seguridad podemos ir más allá y decir que, por grande que sea el número de receptores de ingresos y cualquiera que sea la cuantía de sus rentas, cualquier transferencia entre cualquiera dos de ellos, o, en*

general, cualquier series de tales transferencias, sujetas a la condición anterior, disminuirá la desigualdad.[1] *Es posible que, al comparar dos distribuciones en las que tanto la renta total como el número de receptores de renta sean iguales, podamos ver que una puede ser capaz de ser una evolución de la otra por medio de una serie de transferencias de esta clase. En tal caso podemos decir con certeza que la desigualdad de una es menor que la de la otra.*

Fijado este principio, Dalton analiza qué medidas de dispersión de las usadas entonces lo cumplen. Las medidas analizadas son:

- Desviación media de la media aritmética: $\dfrac{\sum\left|x_i - \bar{X}\right|}{n}$, y esa misma medida relativizada, al dividirla por la media aritmética (Dalton la llama *desviación media relativa*).
- Desviación típica: $S = \sqrt{\dfrac{\sum\left(x_i - \bar{X}\right)^2}{n}}$, y la correspondiente medida relativizada, que se obtiene al dividir también por la media aritmética (lo que en estadística descriptiva llamamos coeficiente de variación, y Dalton llamó *desviación estándar relativa*).
- La medida cuartil de Bowley: $\dfrac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$, donde Q_1 y Q_3 son cuartiles. Esta es una medida relativa de dispersión.
- La diferencia media de Gini: escribe Dalton, *media aritmética de las diferencias, tomadas de manera positiva, entre todas las posibles parejas de rentas*: $\dfrac{\sum_i \sum_j \left|x_i - x_j\right|}{n(n-1)}$. También relativiza esta medida, dividiéndola de nuevo por la media aritmética, y llamándola *diferencia media relativa*.
- La curva de Lorenz, método gráfico de mostrar la distribución de la renta. Señala que el área de Lorenz (área entre la curva y la línea de equidistribución) es una medida de desigualdad, y añade que una notable relación ha sido encontrada entre esta medida y la anterior de Gini, remitiéndonos a Ricci (1916), *L'Indice di Variabilitá*. pp. 22-24, aunque opina la demostración ha sido dada previamente por el propio Gini.

[1] La desigualdad es cierta que disminuye por una serie de transferencias tales que cualquier transferencia de A, el más rico, a B, el más pobre, dejando aún a A más rico o tan rico como B. Pero si alguna de las transferencias hace a B más rico que a A, es posible que los efectos de la serie de transferencias puedan cancelarse y que la desigualdad quede igual que antes

- Por último, comenta que lo ha intentado con la medida de desigualdad de rentas del profesor Pareto, “pero esta medida no puede ser testada, con referencia al principio de transferencia, ya que se basa en una supuesta ley, según la cual, si el total de la renta y el número de receptores de renta son conocidos, la distribución se determina de forma única.”

De todas estas medidas concluye:

1. La primera de ellas no satisface el principio de transferencia en la siguiente circunstancia: si consideramos la distribución de rentas dividida en dos poblaciones separadas por la media, si se produce la transferencia entre dos individuos situados en el mismo lado de la media, tanto la desviación media de la media aritmética, como la desviación media relativa, no se ven afectadas por dicha transferencia. Para ilustrar el hecho Dalton escribe, “si las comodidades adicionales para los millonarios se proporcionasen desde un impuesto sobre aquellos cuyos ingresos están por encima de la media, siempre que ninguno de estos últimos se redujese por debajo de la media por el impuesto”, esta medida no se altera. Por tanto, esta primera medida no supera el test.
2. La desviación típica y, por tanto, el coeficiente de variación, disminuyen si se produce una transferencia de rico a pobre. Es, por tanto, sensible a este principio. Dalton demuestra que, si *S* es la desviación típica de una distribución con *n* rentas, y *S*’ es la misma desviación típica, pero después que una transferencia, de valor *h*, se ha producido desde una renta x_1 a una renta x_2, permaneciendo constantes el resto de las rentas, entonces se verifica $n^2(S^2 - S'^2) = 2h(x_1 - x_2) - 2h^2$. De esta forma concluye que ambas desviaciones típicas permanecerán iguales si, y solo si, $h = 0$ o $h = x_1 - x_2$.
3. Para Dalton, la dispersión cuartil de Bowley es sensible a las transferencias siempre y cuando éstas afecten a los cuartiles, provocando desplazamiento de los mismos, pero no de otra manera. Por tanto, concluye, aunque es algo sensible, lo es mucho menos que la desviación típica.
4. Respecto a la medida de desigualdad de Gini, sin más comentario, Dalton escribe que es una medida perfectamente sensible a las transferencias.
5. Y respecto de la curva de Lorenz, aunque la cita y destaca la relación con la medida de Gini ya comentada, Dalton no vio la relación con el principio de transferencias: que cuando a una distribución A se puede llegar desde una distribución B por una secuencia de transferencias que igualan y que preservan medias, entonces la curva de Lorenz para A se encuentra dentro de la de B.

Tras este análisis Dalton opina que la aplicación del principio de transferencias es limitado: “Pero el alcance del principio de transferencia, como test de medidas de desigualdad, es estrictamente limitado. Puede sólo ser aplicado en algunos casos —y de ninguna manera a todos— en los que tanto la renta total como el número de receptores de renta son constantes, y la distribución varía. No puede ser aplicado cuando, o bien la renta total o bien el número de receptores de renta, varía, o cuando ambos varían simultáneamente."

Entonces manifiesta que han de establecerse otros principios con los que poder testar las medidas clásicas de desigualdad ya comentadas en este apartado, pero en circunstancias más generales. En particular, Dalton establece otros tres principios que analizamos a continuación.

5. OTROS TRES PRINCIPIOS PARA TESTAR MEDIDAS DE DESIGUALDAD

El primero de estos tres es el efecto de un *incremento o disminución proporcional de la renta* de todos los individuos sobre la medida de desigualdad. Es lo que en estadística descriptiva llamamos cambio de escala. Pero Dalton insiste en un incremento proporcional efectivo, no lo que sería cambiar de libras a chelines, por ejemplo. Comenta que se ha sugerido a veces que un incremento o disminución proporcional no afecta a la desigualdad, pero, añade él, si se acepta la definición de desigualdad como la ratio establecida al principio entre bienestares, entonces sí se vería afectada: un incremento proporcional haría disminuir la desigualdad y una rebaja proporcional la aumentaría. Dalton manifiesta que la demostración de este principio a partir de la definición de desigualdad por él mismo establecida es complicada, pero lleva a cabo tal demostración para los dos casos de relaciones funcionales entre bienestar y renta que introdujo al principio de su trabajo. Así, en el primer caso, si $\omega = \log x$, y si δ fuese la desigualdad para una distribución dada, tenemos

$$\delta = \frac{\log x_a}{\log x_g}.$$

Supongamos que todas las rentas son multiplicadas por θ y sea δ' la desigualdad de la nueva distribución.

Entonces, $\delta' = \dfrac{\log\theta + \log x_a}{\log\theta + \log x_g}$ y, dado que $x_a > x_g$, tenemos que $\delta > \delta'$, si $\log\theta > 0$, que es los mismo que decir si $\theta > 1$ (o sea, incremento proporcional).

Similarmente, $\delta < \delta'$ si $\theta < 1$ (o sea, disminución proporcional).

Añade que, si en lugar de usar $\delta = \dfrac{\log x_a}{\log x_g}$, se hubiese usado la posible simplificación de $\delta = \dfrac{x_a}{x_g}$, entonces no se vería afectada por esa variación proporcional, por lo que esta última no es una simplificación de la primera, sino que es otra medida distinta y de inferior valía. Dalton añade que la demostración está hecha para el caso en que x representa la renta total del individuo. Él entiende que si lo que representa es la renta excedente a la subsistencia la relación comentada se mantiene.

Una demostración similar, con igual conclusión, es desarrollada para el segundo caso en que $\omega = c - \frac{1}{x}$.

Así queda definido el primer principio de los tres que ahora está añadiendo. Dice que, si éste se da como cierto, el segundo, que presenta a continuación, sería un corolario del primero. Se trata del caso de *igual incremento absoluto de la renta o igual decremento*. En estadística descriptiva sería aquello de efectuar un cambio de origen positivo o negativo a la variable que representa la renta de todos los individuos. El principio afirmaría que iguales incrementos absolutos de la renta deben hacer disminuir el valor de la medida de desigualdad, y al contrario cuando se producen iguales sustracciones. Dalton opina que la demostración de este principio para un caso general de relación entre bienestar y renta le resulta difícil, "aunque diversos escritores han observado el principio tan obvio que ninguna demostración han requerido". Añade que considerándolo como corolario del principio anterior la demostración sería fácil, argumentando que "si dejamos que la renta adicional total implicada en las adiciones proporcionales a todas las rentas sea redistribuida entre los receptores de renta de tal manera que haga igual, en lugar de proporcionada, lo que se suma a cada renta, entonces con la adición el máximo bienestar económico alcanzable es el mismo en ambos casos. Pero con la adición el bienestar económico realmente alcanzable es obviamente mayor, cuando las adiciones a las rentas son iguales que cuando son proporcionales. Por tanto, la desigualdad es menor después de que iguales adiciones han sido hechas que después de que hayan sido hechas adiciones proporcionales, siendo la renta total adicional la misma en ambos casos."

Por último, el tercer principio Dalton propone para evaluar una medida de desigualdad: principio de *incrementos proporcionales de personas*. Según el mismo, una desigualdad no se debería ver afectada por incrementos proporcionales de población, "pues el máximo bienestar económico alcanzable y el bienestar económico realmente alcanzado se habrán incrementado en la misma proporción y, por tanto, su ratio quedará inalterada".

El autor nos comenta que mediante simples operaciones matemáticas ha logrado testar los tres principios en las medidas de dispersión que ya habían sido testadas por el principio de transferencias, y presenta una tabla resumen parecida a la que sigue:

Tabla 1. Tabla resumen de los principios que cumplen las medidas de dispersión más conocidas

Sobre:	**Efecto de**		
	Incrementos proporcionales de las rentas *(cambio de escala mayor que 1)*	**Incrementos iguales de las rentas *(cambio de origen positivo)***	**Incrementos proporcionales de las personas**
Desviación media absoluta	Crece	No cambia	No cambia
Desviación media relativa	No cambia	Disminuye	No cambia
Desviación estándar absoluta	Crece	No cambia	No cambia
Desviación estándar relativa	No cambia	Disminuye	No cambia
Medida cuartil de Bowley	No cambia	Disminuye	No cambia
Diferencia media absoluta	Crece	No cambia	No cambia
Diferencia media relativa	No cambia	Disminuye	No cambia

Así pues, a modo de resumen Dalton escribe:

Las tres medidas absolutas de dispersión dan un conjunto de resultados idénticos, y las cuatro medidas relativas otro. Ninguna de las siete medidas supera el test de incrementos proporcionales de las rentas, pero las medidas relativas vienen más a hacerlo que las medidas absolutas. Las medidas relativas pasan la prueba de igual incremento de la renta, pero las medidas absolutas no. Las siete medidas pasan la prueba de incrementos proporcionales de personas. Por tanto, podemos eliminar las tres medidas absolutas de mayor consideración. En las relaciones entre las cuatro medidas relativas, el orden de mérito establecido por referencia al principio de las transferencias puede mantenerse, hasta el momento, sin cambios, a saber:

1 y 2. Desviación estándar relativa y diferencia media relativa.

3. Medida cuartil de Bowley.

4. Desviación media relativa.

6. LA MEDIDA DE DESIGUALDAD DE PARETO

La última parte de su artículo Dalton la dedica a la medida de desigualdad del profesor Pareto. Se plantea si son aplicables, a esta medida, algunos de los principios establecidos. Nos informa que se trata de una medida de dispersión relativa que sólo es ajustable cuando la distribución es aproximadamente de la forma $y = \frac{A}{x^a}$, donde x es una renta cualquiera, y el número de rentas mayores que x, y A y a constantes para cualquier distribución dada, pero variables para diferentes distribuciones.[2]

[2] En este punto Dalton cita a PARETO, *Cours d'Economie Politique*, II, pp. 305 ff, y *Manuel d'Economie Politique*, pp. 391 ff.

Añade que asumir esta fórmula para la distribución de la renta, el profesor Bowley ha demostrado,[3] es lo mismo que asumir que la media de todas las rentas mayores que *x* es proporcional a *x*. Dalton comenta que el profesor Pareto trata a *a* como medida de desigualdad, en el sentido de que, a mayor *a*, mayor desigualdad. De ello se deduce matemáticamente que "ni un aumento de los ingresos mínimos ni una disminución en la desigualdad de ingresos puede tener lugar, excepto cuando el incremento total de ingresos es más rápido que el de la población."[4] En otras palabras, el aumento de la producción per cápita es tanto una condición necesaria como suficiente para garantizar una disminución de la desigualdad.

Nos comenta que la "uniformidad" en la distribución que implica la ley hace que sea imposible aplicar el principio de las transferencias, ni tampoco el principio de iguales incrementos en la renta. Dalton añade: "Se ha sugerido[5] que esta medida, donde es aplicable, estará de acuerdo en general con otras medidas plausibles de dispersión. Pero, a la vista de las investigaciones de los economistas italianos, esto es muy dudoso.[6] Parece en general más probable, aunque la cuestión requiere más estudio, que, con el fin de ponerla en general de acuerdo con otras medidas, la medida de Pareto debe ser invertida, de modo que, a mayor *a*, desigualdad más pequeña. Pero tal inversión chocará con las supuestas armonías económicas del profesor Pareto, y que, de acuerdo con su ley, ¡el aumento de la producción per cápita siempre significa aumento de la desigualdad!".

A continuación, Dalton nos recuerda una propuesta de Gini,[7] que según la cual muchas distribuciones reales de los ingresos se aproximan por la fórmula

$$n = \frac{1}{c} s^{\delta}, \quad \text{o bien,} \quad \log n = \delta \log s - \log c \,,$$

donde *s* es la renta total de los *n* receptores de renta más ricos y δ y *c* son constantes para una distribución dada. Gini propone δ como medida de desigualdad, o "índice de concentración" como prefiere llamarlo, tal que, a mayor δ, mayor desigualdad. Dalton opina que $\delta = \dfrac{a}{a-1}$ es una variante más conveniente que la del profesor Pareto, tal que, cuando *a* disminuye desde cualquier cantidad mayor que uno a uno, δ crece hasta el infinito.

---

3 Aquí cita a BOWLEY, *Measurement of Social Phenomena*, p. 106.
4 De nuevo cita a PARETO, *Cours d'Economie Politique*, II, pp. 320-1.
5 Aquí cita a PIGOU, *Wealth and Welfare*, pp. 25 y 72.
6 Aquí cita a todos estos textos: BRESCIANI, *Giornale degli Economisti*, agosto de 1905, pp. 117-8, y enero de 1907, pp. 27-8. RICCI, *L'Indice di Variabilità*, pp. 43-6, GINI, *Variabilità* p. 65 y pp. 70-1. Compare también Persons, *Quarterly Journal of Economics*, 1908-9, pp. 420-1, y BENINI, *Principii di Statistica Metodologica*, p. 187. El profesor Benini invierte la medida del profesor Pareto, pero al parecer sin darse cuenta de que lo ha hecho.
7 Aquí cita a GINI, *Variabilità*, pp. 72 ff.

Además, la ecuación $\log n = \delta \log s - \log c$ es fácilmente transformada en la de una curva de Lorenz. Pues, si N es el número total de receptores de renta y S es la renta total, escribimos la expresión de arriba para estos totales: $\log N = \delta \log S - \log c$, y restando a la de arriba esta última $\log \frac{n}{N} = \delta \log \frac{s}{S}$.

Poniendo $\frac{n}{N} = \frac{y}{100}$ y $\frac{s}{S} = \frac{x}{100}$, tenemos la ecuación de una curva de Lorenz, $\log \frac{y}{100} = \delta \log \frac{x}{100}$, o $\frac{y}{100} = \left(\frac{x}{100}\right)^{\delta}$.

El área encerrada entre esta curva de Lorenz y la línea de equidistribución es

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(100)^2 - \int_{x=0}^{x=100} y\,dx &= \frac{1}{2}(100)^2 - \int_0^{100} 100\frac{x^{\delta}}{100^{\delta}}\,dx \\ &= (100)^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\delta+1}\right)\end{aligned}$$

Así, mayor δ implica mayor el área por encima, y mayor la *diferencia media relativa* (la de Gini).[8] Esto lleva a Dalton a la reflexión de que es posible creer que el recíproco de la medida adoptada por el profesor Pareto, es una mera variante de la diferencia media relativa, para el caso particular en que la distribución está aproximadamente de acuerdo con la ley de Pareto. Por tanto, la medida de desigualdad de Pareto no tendría ningún significado, y, en el caso más general, cuando la distribución se aparta considerablemente de la ley de Pareto, la medida, por supuesto, no tiene importancia alguna.

7. MEJORAR LA INFORMACIÓN ESTADÍSTICA

Dalton termina su artículo con un alegato en favor de la mejora de la información estadística (estamos hablando de 1920): “la principal necesidad práctica es la mejora de información estadística existente, especialmente en lo que se refiere a los ingresos más pequeños”, y añade, “This paper may be compared to an essay in a few of the principles of brickmaking. But, until a greater abundance of straw is forthcoming, these principles cannot be put to the test of practice.”

[8] Aquí nos dice que este índice δ ha sido usado por varios escritores italianos en investigaciones sobre distribuciones de renta. Ver, por ejemplo, Savorgnan, *La Distribuzione dei Redditi nelle Provincie e nelle Grandi Città dell? Austria*, y Porru, *La Concentrazione della Ricchezza nelle Diverse Regioni d’Italia.*

Teniendo en cuenta sus dudas sobre la perfección de las estadísticas que disponía, reflexiona sobre el empleo de las cuatro medidas de dispersión que acabó clasificando en orden de preferencia, y que hemos presentado al final del punto 6, para el caso de estadísticas imperfectas.

Así, para esas cuatro medidas que figuran en orden de mérito, este orden se basa en las ventajas teóricas. Pero también debe tenerse en cuenta la aplicabilidad práctica. Tanto la desviación media relativa y como la medida cuartil son más fácilmente aplicable que cualquiera de sus dos rivales a estadísticas perfectas, y aplicable, con menos riesgo de error grave, a las estadísticas imperfectas. Por lo que respecta a estadísticas perfectas, o casi perfectas, la ventaja del primer par sobre el segundo tiene que ver con la laboriosidad y no con la precisión, y no es, por lo tanto, un asunto de gran importancia. Pero, en cuanto a las estadísticas notablemente imperfectas, tales como las que son realmente disponibles, la ventaja tiene que ver con la precisión, así como con la laboriosidad y es, por lo tanto, vital.

La conclusión provisional que Dalton sugiere, es como sigue. Cuando las estadísticas son tan imperfectas, que ni la desviación estándar relativa ni la diferencia media relativa se pueden aplicar con expectativa de una precisión razonable, debemos usar la desviación media relativa y la medida cuartil. Con esto algo se palia la insensibilidad de estas últimas al principio de transferencia. Si, entonces, ambas dan el mismo resultado en cualquier comparación en particular, su evidencia es hasta cierto punto de corroboración.

Si las estadísticas están tan mejoradas que la desviación estándar relativa y la diferencia media relativa son aplicables, estas son preferibles a las dos medidas que acabamos de mencionar. Si sólo se usa una medida, la diferencia media relativa es, quizás, ligeramente preferible, debido a la conveniencia gráfica de la curva de Lorenz. Probablemente, sin embargo, será deseable, al menos durante algún tiempo, no confiar en la evidencia de una única medida, sino de la corroboración de varias.

Por último, dadas estadísticas perfectas, o casi perfectas, vale la pena considerar si la corroboración no puede también ser buscada desde la medida $\frac{\log x_a}{\log x_g}$, aplicándola, en aras de la simplicidad, a la renta total, y no a la renta que excede al mínimo de subsistencia. Pues esta medida supera nuestro test de incrementos proporcionales de la renta, que ninguna de las otras cuatro lo hacen. En los casos más prácticos, sin duda, estas cinco medidas darán resultados que apuntan en la misma dirección, pero en algunos casos pueden no hacerlo.

8. CONCLUSIÓN

En su artículo, Dalton considera la renta no como tal, sino como el determinante del bienestar individual y, por tanto, se centra en cuestiones relacionadas con este asunto.

Él no discute sobre la medición de la desigualdad en general (una importante ruptura con la tradición de escritores anteriores, en particular en la extensa literatura italiana que él mismo cita en su trabajo). Adoptando esta perspectiva específica "instrumental", fue capaz de penetrar mucho más allá y relacionar la elección de las medidas de desigualdad con la subyacente preocupación por el bienestar social.

Dalton observa el bienestar social a través de ojos resueltamente utilitarios, como en *Wealth and Welfare* (*Riqueza y Bienestar*) de Pigou (1912), quien había introducido un concepto clave que subyace en gran parte del artículo de Dalton: **el principio de transferencias (hoy día, principio de transferencia de Pigou-Dalton)**. Una transferencia que preserva la renta media, de una persona más rica a una persona más pobre, o lo que ha llegado a ser conocido como una transferencia de Pigou-Dalton, "debe incrementar la satisfacción total" (Pigou, 1912, p.24). Es importante destacar que, se asume aquí que el bienestar es una función no decreciente, cóncava de la renta, idéntica para todas las personas. Aunque no se indica en estos términos, hay una equivalencia entre la afirmación de que a la distribución A se puede llegar desde la distribución B mediante una secuencia de transferencias que preservan la media y la afirmación de que la distribución de A tiene un nivel más alto que B respecto de la suma de bienestares individuales.

De alguna forma, Dalton invita a los científicos sociales a reflexionar sobre el sentido de bienestar y su relación con las medidas de desigualdad utilizadas para estudiar la distribución de la renta. Tras casi un siglo desde su publicación la teoría de la medición de la desigualdad sigue atrayendo mucha atención. De hecho, el legado perdurable de Dalton es la exhortación a pensar seriamente en las implicaciones de nuestras herramientas de medición, especialmente en un campo en el que la evaluación de las diferencias objetivas está intrínsecamente entrelazada con nuestros puntos de vista normativos. El enfoque de Sen (1975), por ejemplo de distinguir entre medidas objetivas y normativas, va en ese sentido.

BIBLIOGRAFÍA

ATKINSON, A.B. (1970). "On the measurement of inequality", *Journal of Economic Theory*, vol. 2(3), pp. 244-263.

DALTON, H. (1920). "The measurement of the inequality of incomes", *Economic Journal*, vol. 30(119), pp. 348-361.

DALTON, H. (1953). *Call Back Yesterday. Memoirs 1887-1931*, London: Frederick Muller.

GINI, C. (1921). "Measurement of inequality of incomes", *Economic Journal*, vol. 31(121), pp. 124-126.

PIGOU, A.C. (1912). *Wealth and Welfare*, London: Macmillan.

SEN, A.K. (1973). *On Economic Inequality*, Oxford: Oxford University Press.

SEN, A (1978). *Sobre la desigualdad económica*. Editorial Crítica.

CAPÍTULO 6

LA MEDIDA DE DESIGUALDAD DE ATKINSON (1970): ESTUDIO Y DESCRIPCIÓN DEL TRABAJO ORIGINAL

ANA SOLTERO DIAZ
CONSUELO BORRERO GALLEGO
CRISTINA CAMÚÑEZ DIAZ
Universidad de Sevilla

1. INTRODUCCIÓN

Sir Anthony Barnes "Tony" Atkinson (nacido el 4 de septiembre 1944), es un estadístico y economista británico conocido en la literatura por su índice de desigualdad en el reparto de una riqueza, el índice de Atkinson, muy empleado y citado desde que se publicó por primera vez en 1970.

Desde los inicios de sus investigaciones el profesor Atkinson ha estado particularmente preocupado por las cuestiones de la justicia social y el diseño de las políticas públicas. Ha escrito sobre economía desde la década de los 60. Su primer libro publicado fue sobre la pobreza en Gran Bretaña y su segundo sobre la distribución desigual de la riqueza. Actualmente se encuentra trabajando sobre los "ingresos top", contribuyendo a la World Top Incomes Database, y sobre el seguimiento de la creciente desigualdad en el mundo.

En 1970, Atkinson publicó un trabajo titulado "On the measurement of inequality" (*Journal of Economic Theory*, 2 (3), pp. 244-263) y en el mismo aparece por primera vez el conocido desde entonces como "índice de desigualdad de Atkinson", uno de los más frecuentes en la literatura sobre desigualdad. Dentro de la clasificación en dos grupos de este tipo de medidas, *medidas positivas*, que no emplean de manera explícita concepto alguno de bienestar, y *medidas normativas*, las que de manera explícita emplean el bienestar social en su definición, e intentan medir la pérdida que se produce de dicho bienestar por darse una distribución desigual, este índice de Atkinson se sitúa en el segundo grupo. Amartya Sen (1978), galardonado con el Premio Nobel de Economía en 1998 por sus aportaciones a la economía del bienestar, lo clasifica de esta forma en su texto sobre la desigualdad económica publicado en español en 1978. Eso implica que en la construcción del índice va implícita la existencia de una función de bienestar social que refleja de manera manifiesta los juicios de valor acerca de la relación entre desigualdad y bienestar.

En realidad, en lugar de hablar de un Índice de Atkinson podríamos hablar de una "familia de índices normativos de Atkinson", dado que la definición del propio índice depende del valor de un parámetro que el investigador interesado establece y, en virtud del cual, se calcula el citado índice.

El objetivo de nuestro trabajo es el de intentar describir el artículo original donde se publicó el índice de Atkinson.

2. LA INTRODUCCIÓN DEL TRABAJO

El trabajo fue publicado en el *Journal of Economic Theory*, en 1970, como se ha dicho. El mismo comienza con una introducción en la que el autor señala en primer lugar sus motivaciones para abordar este trabajo, indicando que sobre las medidas de desigualdad conocidas y usadas hasta ese momento se ha prestado poca atención a "los problemas conceptuales involucrados en la medición de la desigualdad" y que, entonces, ha habido "pocas contribuciones a los fundamentos teóricos de la cuestión".

El autor nos dice que, en los enfoques convencionales de la mayoría de los trabajos empíricos conocidos hasta el momento, se considera algún estadístico que resume la desigualdad (como la varianza, el coeficiente de variación o el índice de Gini), sin dar razones específicas para considerar un indicador u otro. Recuerda que Dalton (1920) en su pionero trabajo ya avisaba que lo que subyace en cualquiera de esas medidas es un concepto de "bienestar social", y piensa que es de ese concepto del que debemos ocuparnos. Entonces, establece una función $U(y)$ que sería la que mide el bienestar social asociado a una renta " y ", la cual es una variable cuya función de densidad se representa por $f(y)$. Supone que $U(y)$ es creciente y cóncava ($U'(y) > 0; \quad U''(y) < 0$), lo cual "no limita mucho el problema", y propone usar la expresión

$$W = \int_0^{\bar{y}} U(y) f(y) dy$$

(W, bienestar social de una sociedad, que supone **simétrica y aditivamente separable** respecto a los ingresos individuales) para clasificar las distribuciones de renta (siendo $\bar{y}$ el valor máximo de esa distribución, la renta máxima, según la notación de Atkinson). Observamos que W es una esperanza matemática de la función $U(y)$ bajo la distribución $f(y)$, o sea, una media de los bienestares sociales asociados de cada uno de los individuos que forman parte del colectivo y cuyas rentas "*y*" les proporciona dicho bienestar.

Distingue dos objetivos a la hora de comparar distribuciones: (1) poder establecer una ordenación de las distribuciones de las rentas (desde la más desigual a la más igualitaria, o viceversa), y (2), poder cuantificar la diferencia en la desigualdad entre dos distribuciones. Opina que las medidas convencionales conocidas hasta ese momento están más volcadas en alcanzar el segundo objetivo, pero cree que para un economista "es más natural comenzar por considerar el problema de obtener el ranking de distribuciones, ya que esto puede requerir menos acuerdo sobre la forma de la función de bienestar social".

3. ORDENACIÓN DE DISTRIBUCIONES

Bajo el supuesto ya establecido para $U(y)$ (función continuamente diferenciable dos veces, creciente y cóncava), se plantea cómo clasificar dos distribuciones sin tener que dar más detalles sobre dicha función. Para dar respuesta recurre a trabajos publicados recientemente sobre toma de decisiones en ambiente de incertidumbre. De esta forma, compara $U(y)$ con una función de utilidad y, así, establece que ordenar distribuciones según el criterio de W es lo mismo que ordenarlas según la utilidad esperada. Añade que el supuesto de concavidad establecido para dicha función coincide con el supuesto de "aversión al riesgo" en un problema de toma de decisiones bajo incertidumbre. En este contexto comenta que hay una serie de autores que recientemente han demostrado el siguiente resultado (en particular cita a Hadar y Russell, 1969):

Una distribución $f(y)$ será preferida a otra distribución $f^*(y)$ según el criterio de W para cualquier $U(y)$ $(U' > 0, \quad U'' \leq 0)$ *si y sólo si*,

$$\int_0^z \left[F(y) - F^*(y)\right] dy \leq 0 \text{ para todo } z, \quad 0 \leq z \leq \bar{y}$$

y

$$F(y) \neq F^*(y) \text{ para algún } y,$$

donde $F(y) = \int_0^y f(x)\,dx$ (función de distribución de la renta *y*).

De esta forma se encuentra con un procedimiento para ordenar distribuciones, pero entiende que es difícil de interpretar, salvo que se utilice la curva de Lorenz (indica que esa interpretación ha pasado por alto hasta ahora). Supone en un principio que se comparan dos distribuciones con la misma media (sería el caso de comparar una distribución antes y después de llevar a cabo una redistribución del total dado).

Dicha media la representa por μ. Entonces, nos da la definición de la curva de Lorenz como la definida implícitamente por estas dos funciones:

$$\phi(F(y_1)) = \frac{1}{\mu}\int_0^{y_1} y \cdot f(y)\,dy, \qquad F(y_1) = \int_0^{y_1} f(y)\,dy.$$

A continuación, efectúa la primera integral por partes, obteniendo

$$\mu\phi[F(y_1)] = y_1[F(y_1)] - \int_0^{y_1} F(y)\,dy.$$

Así, si se compara la curva de Lorenz de dos distribuciones, $f(y)$ y $f^*(y)$ en un punto $\bar{F} = F(y_1) = F^*(y_1^*)$, entonces

$$\mu\left[\phi(\bar{F}) - \phi^*(\bar{F})\right] = \left[y_1 - y_1^*\right]\bar{F} - \left[\int_0^{y_1} F(y)\,dy - \int_0^{y_1^*} F^*(y)\,dy\right]$$
$$= -\int_0^{y_1^*}\left(F(y) - F^*(y)\right)dy + \left[\int_{y_1}^{y_1^*} F(y)\,dy - \left(y_1^* - y_1\right)F(y_1)\right].$$

Aplica el primer teorema del valor medio para justificar que el término entre corchete es positivo, y el primer sumando, según la condición del recuadro de arriba, es negativo, pero al tener un signo menos delante también es positivo. En definitiva, si nos fijamos en el primer término de la secuencia de igualdades anteriores, podemos decir que $\mu\left[\phi(\bar{F}) - \phi^*(\bar{F})\right] = \mu \cdot \phi(\bar{F}) - \mu \cdot \phi^*(\bar{F}) \geq 0$, o sea, la curva de Lorenz correspondiente a $f(y)$ estará siempre por encima de la correspondiente a $f^*(y)$. A continuación, demuestra la implicación en sentido contrario: si la curva de Lorenz de $f(y)$ se encuentra por encima de la de $f^*(y)$ para cualquier F entonces la condición del recuadro será satisfecha. Ahora bien, tanto en una implicación como en la contraria, está la exigencia de que no se corten las dos curvas de Lorenz.

De esta forma, Atkinson encuentra un instrumento cercano a las medidas de desigualdad, la curva de Lorenz, que le permite ordenar dos distribuciones con la misma media para una función de bienestar social $U(y)$ muy genérica. Así, escribe: *Podemos deducir que, si las curvas de Lorenz de dos distribuciones no se cortan, entonces podemos juzgar entre ellos sin necesidad de ponerse de acuerdo sobre la forma de $U(y)$ (excepto que sea creciente y cóncava); pero que, si cruzan, siempre podemos encontrar dos funciones que se ubicarán de manera diferente.*

Ahora considera dos distribuciones con diferente media y comenta esta doble implicación:

Si se cumple la condición del recuadro, entonces $\mu \geq \mu^*$.

Si $\mu \geq \mu^*$ y la curva de Lorenz de $f(y)$ se encuentra por encima de la de $f^*(y)$ entonces la condición del recuadro se cumple.

En este contexto surge la idea de poder pasar mediante "transferencias" de una distribución $f^*(y)$ a una distribución $f(y)$. Recuerda el *principio de transferencia* de Dalton (1920): Si realizamos una transferencia de ingresos d de una persona con y_1 ingresos a una persona con ingresos menores y_2 (donde $y_2 \leq y_1 - d$), entonces, la nueva distribución será preferida (su curva de Lorenz estará por encima de la que corresponde a la distribución inicial). Entonces cita a los autores Rothschild y Stiglitz[1] para indicar que, en un contexto de toma de decisiones bajo incertidumbre, los mismos han demostrado que la condición ya citada del recuadro es equivalente a decir que $f^*(y)$ podría alcanzar $f(y)$ para cualquier grado deseado de aproximación con una secuencia de transferencias de ricos a pobres como la citada arriba. Por tanto, consigue una interpretación alternativa de la condición del recuadro: *Una condición necesaria y suficiente para que seamos capaces de clasificar dos distribuciones de forma independiente de la función de utilidad (aparte de que sea creciente y cóncava) es que se puede obtener una a partir de la otra por redistribución de los ingresos de los más ricos a los más pobres.*

Luego nuestro autor añade: *Que la concavidad de $U(y)$ sea suficiente para garantizar que el principio de transferencia se cumpla no es nada sorprendente*; *sin embargo, no es tan obvio que ésta sea la clase más amplia de distribuciones que se puede clasificar sin ninguna restricción adicional sobre la forma de $U(y)$.*

4. ORDENACIÓN COMPLETA Y RENTA EQUIVALENTE IGUALMENTE DISTRIBUIDA

En este punto, Atkinson es consciente de que se necesita especificar con mayor precisión $U(y)$ para poder efectuar con garantías una ordenación de cualesquiera distribuciones dadas de la renta. Recurre de nuevo a Dalton (1920) para recordar que este autor sugiere usar como medida de desigualdad la ratio entre el nivel actual de bienestar social y el que se conseguiría si los ingresos estuviesen igualmente distribuidos[2]: $\dfrac{\int_0^{\bar{y}} U(y) f(y) dy}{U(\mu)}$. Pero critica esta medida por no ser invariante ante transformaciones lineales de $U(y)$. Así, por ejemplo, si la función de bienestar social es logarítmica, $U(y) = \log y$, y si a la variable ingresos le efectuamos un cambio de escala, $y' = a \cdot y$, entonces $U(y') = \log(a \cdot y) = \log y + \log a = \log y + c$, y la medida

[1] Cuya referencia bibliográfica es M. ROTHSCHILD and J. E. STIGLITZ, "Increasing Risk: A Definition and its Economic Consequences", *Cowles Foundation Discussion Paper*, 275, May 27, 1969, a la que no hemos tenido acceso.

[2] Realmente, Dalton propuso su medida como la inversa de la que comenta Atkinson: ratio entre el máximo bienestar posible, si las rentas fuesen iguales, y el bienestar social actual.

propuesta por Dalton quedaría $\frac{\int_0^{\bar{y}} \log(y) f(y) dy + c}{\log(\mu) + c}$, cociente que claramente depende de c. Por esta razón, Atkinson opina que esta medida no es muy útil.

Entonces, nuestro autor se plantea crear una medida que sea invariante ante transformaciones lineales. Para ello introduce el concepto de "nivel de renta equivalente distribuido igualmente" (es nuestra traducción de "equally distributed equivalent level of income"), que lo representa por y_{EDE}, y que lo define como "el nivel de renta per cápita tal que si fuese el mismo para todos los individuos proporcionaría el mismo nivel de bienestar que la distribución actual. Esa definición lleva a la siguiente igualdad: $U(y_{EDE}) \int_0^{\bar{y}} f(y) dy = \int_0^{\bar{y}} U(y) f(y) dy$. Así, una vez calculado y_{EDE}, su propuesta de medida de desigualdad es:

$$I = 1 - \frac{y_{EDE}}{\mu}.$$

donde $0 \le I \le 1$, tomando el valor 0 cuando hay una igualdad total, y el valor 1 para una desigualdad total. La disminución del valor de este indicador implica que la distribución de renta se hace más igualitaria, pues μ se acerca a y_{EDE} (la media real se aproxima al nivel de renta distribuido igualmente equivalente). Lo atractivo de esta medida para su autor es lo intuitiva que resulta. Así, si $I = 0,3$, por ejemplo, diríamos que si la distribución de los ingresos fuese igualitaria sólo necesitaríamos un 70% del ingreso total actual para alcanzar el mismo nivel de bienestar social que el que proporciona esa distribución del ingreso actual. Con esto se facilita la comparación del beneficio que se deriva de una redistribución de renta con los costos que ello acarrea (como el efecto desincentivador de la carga fiscal), y con los beneficios de otras medidas económicas alternativas.

El autor deja claro que su medida definida por y_{EDE} coincide con el "equivalente cierto" en el contexto de toma de decisiones bajo incertidumbre, y que su índice I es igual a la prima de riesgo proporcional introducida por Pratt en un trabajo publicado en 1964[3]. Por tanto, una vez más, Atkinson acude a la teoría de toma de decisiones bajo incertidumbre para avanzar en sus propuestas.

A continuación, se plantea la necesidad de que la medida sea invariante ante cambios proporcionales de la renta. O sea, si la distribución de los ingresos de un país A es la misma que la de un país B, salvo un cambio de escala, o sea, si $f_A(y) = f_B(\theta y)$, entonces ambas distribuciones deben estar caracterizadas por el mismo grado de

[3] La prima de riesgo proporcional se define como la cantidad de tal manera que a una persona con riqueza inicial W le sería indiferente entre aceptar un riesgo Wz (donde z es una variable aleatoria) y la recepción de la cantidad no aleatoria $E(Wz) - W\pi^*$. En el caso actual, $W = \mu$ y $z = (y - \mu)/\mu$.

desigualdad calculado por el índice *I*. Bajo esta condición, acude de nuevo al resultado de Pratt (1964) para establecer que ese requisito (que él define como *aversión constante (relativa) a la desigualdad*) implica que $U(y)$ tiene la forma

$$\begin{aligned} U(y) &= A + B\frac{y^{1-\varepsilon}}{1-\varepsilon} \qquad \varepsilon \neq 1 \\ U(y) &= \log_e(y), \qquad \varepsilon = 1 \end{aligned}$$

donde requerimos $\varepsilon > 0$ para la concavidad. Por otra parte, añade, es razonable exigir que la función de bienestar social presente aversión al incremento relativo de la desigualdad, refiriéndose en este caso al efecto de adiciones proporcionales a los ingresos, aunque también se podría considerar el caso de iguales adiciones absolutas sobre la medida de desigualdad (todo esto en paralelo a la aversión al riesgo en ambiente bajo incertidumbre).

5. MEDIDAS ESPECÍFICAS DE DESIGUALDAD

En este apartado, Atkinson analiza las que él considera como medidas específicas de desigualdad convencionales. En particular, se centra en:

(a) la varianza, V^2,

(b) el coeficiente de variación, V/μ,

(c) la desviación media relativa, $\int_0^{\bar{y}} |y/\mu - 1| f(y)dy$,

(d) el coeficiente de Gini, $1/2\mu\int_0^{\bar{y}} \left[yF(y) - \mu\phi(y)\right] f(y)dy$, y

(e) la desviación estándar de los logaritmos, $\int_0^{\bar{y}} \left[\log(y/\mu)\right]^2 f(y)dy$.

Señala que, si tenemos en cuenta distribuciones con la misma media y aplicamos una de las cuatro primeras medidas, con ellas tenemos la garantía de llegar a una misma clasificación de distribuciones que con una función de bienestar social cóncava arbitraria siempre que ésta cumpla las condiciones establecidas inicialmente en el recuadro. Ahora bien, añade que si dichas condiciones no se cumplen siempre es posible encontrar una función $U(y)$ de manera que clasifique en mejor lugar a una distribución que a su vez tenga el mayor índice de Gini. Por tanto, concluye que con estas medidas se conseguirá la misma ordenación de distribuciones si se cumple la condición del recuadro, pero que si no se cumple tal condición puede haber resultados conflictivos.

Comenta que gran parte de la literatura temprana se preocupa por el problema de elegir entre esas diferentes medidas y para ello se usan propiedades asociadas como facilidad de cálculo, facilidad de interpretación, rango de variación, y si se requiere información sobre toda la distribución. Sin embargo, señala el autor, la cuestión central debe ser la forma de la función de bienestar social que está implícita en la elección de una medida particular y, por tanto, se centra en esta cuestión.

Observa que todas las medidas citadas, salvo la primera, están relativizadas por la media por lo que las mismas no se ven afectadas si se producen iguales aumentos proporcionales en todos los niveles de renta. En el caso de la varianza, dice que, según la teoría de decisión bajo incertidumbre, la clasificación de distribuciones bajo esta medida es equivalente al supuesto de que la función $U(y)$ es cuadrática, y que esto a su vez implica una aversión creciente a la desigualdad absoluta y relativa. El crecimiento de la aversión a la desigualdad relativa puede ser una propiedad bastante aceptable de una medida de desigualdad, según nuestro autor. En cambio, la creciente aversión a la desigualdad absoluta puede ser menos razonable, pues eso significa que iguales incrementos absolutos para todos los ingresos producen que el ingreso equivalente igualmente distribuido aumente, pero en menos cantidad.

A continuación, Atkinson analiza de manera conjunta las otras cuatro medidas, al estilo de cómo Dalton lo hizo 50 años antes, y usando la propiedad conocida hoy día como principio de Pigou-Dalton, que tras ser comentada por el propio Dalton en su artículo de 1920, al parecer, "quedó descuidada desde entonces": *si hacemos una transferencia estrictamente positiva de una persona más rica a una persona pobre, esto debería conducir a una reducción estrictamente positiva en el índice de desigualdad (y no simplemente dejarlo sin cambios).* Nos dice que, si aceptamos este requisito, lo que parece bastante razonable, tenemos motivos para rechazar aquellas medidas que no sean estrictamente cóncavas, y cita la desviación media relativa y el rango intercuartílico. Así, la desviación media relativa no se ve afectada por transferencias entre personas que se encuentran en el mismo lado de la media.

Las otras medidas citadas al principio, el coeficiente de variación, el índice de Gini, y la desviación estándar de los logaritmos, son sensibles a las transferencias en cualquier nivel de los ingresos. Ahora bien, habría que analizar el nivel de sensibilidad de cada una de ellas según los diferentes niveles de ingresos. Para este análisis nuestro autor comenta que en el caso del coeficiente de variación el efecto de una transferencia es independiente del nivel de ingresos en el que se ha hecho. Si, por lo tanto, se quiere dar más peso a las transferencias en el extremo inferior de la distribución que en la parte superior, esta medida no es apropiada. Para la desviación estándar de los logaritmos, $V' = [\log(y/\mu)]/(y/\mu)$, nos dice que da más peso a las transferencias en el extremo inferior, y también, por supuesto, la misma deja de ser cóncava en los niveles altos de renta. Finalmente, en el caso del índice de Gini el efecto de una transferencia infinitesimal *h* puede demostrarse que es proporcional a $F(y_1) - F(y_1 - h)$.

Sus comentarios sobre estas medidas los resume de la siguiente forma:

(a) El uso de la varianza implica una creciente aversión a la desigualdad; todas las demás medidas implican aversión constante a la desigualdad (relativa);

(b) La desviación media relativa no es estrictamente cóncava y no es sensible a las transferencias en el mismo lado de la media;

(c) El coeficiente de variación concede la misma importancia a las transferencias en diferentes niveles de la renta, el coeficiente de Gini atribuye más peso a las transferencias que afecten a las clases con ingresos medios ("no está claro que eso sea socialmente aceptable", añade el autor) y la desviación estándar de los logaritmos da más peso a las transferencias en el extremo inferior de la distribución.

6. EL ENFOQUE DE LA FUNCIÓN DE BIENESTAR SOCIAL

Una vez analizadas las medidas que nuestro autor consideraba más relevantes, plantea que le parece razonable centrarse en la cuestión de crear una función de bienestar social de manera directa, y no a través del análisis de las implicadas en las medidas citadas. Comenta que si bien es indudable que hay una amplia variedad de desacuerdos sobre la forma en la que la función de bienestar social se debe tomar, el enfoque directo nos permite rechazar de una vez a aquellos que no atraen partidarios.

Volviendo a la expresión establecida al principio, $W = \int_0^{\bar{y}} U(y) f(y) dy$, como la que determina la función de bienestar social (esto significa que es simétrica y aditivamente separable en rentas individuales y teniendo en cuenta que buscamos una medida que sea invariante con respecto a los cambios proporcionales, y que tenga la forma ya dada anteriormente, $\begin{array}{ll} U(y) = A + B\dfrac{y^{1-\varepsilon}}{1-\varepsilon} & \varepsilon \neq 1 \\ U(y) = \log_e(y), & \varepsilon = 1 \end{array}$, entonces, señala nuestro autor, en el caso de distribuciones discretas la medida que se propone es (calculando y_{EDE} usando esa expresión y haciendo un cálculo discreto de la esperanza) :

$$I = 1 - \left[\sum_i \left(\frac{y_i}{\mu} \right)^{1-\varepsilon} f(y_i) \right]^{1/(1-\varepsilon)}$$

Medida que ha pasado a la historia como **Índice de Desigualdad de Atkinson.**

Ese índice es para una distribución teórica, dada por $f(y)$. Para una muestra dada, en la que se sustituye la función de probabilidad $f(y)$ por la frecuencia relativa f_i, tenemos la siguiente expresión para el índice (donde para el caso $\varepsilon = 1$ se ha obtenido tomando límite en la primera expresión y aplicando la Regla de l'Hôpital):

$$I = \begin{cases} 1 - \left[\sum_i f_i \left(\dfrac{y_i}{\mu} \right)^{1-\varepsilon} \right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} & \text{para } \varepsilon \neq 1 \\ 1 - \prod_i \left(\dfrac{y_i}{\mu} \right)^{f_i} & \text{para } \varepsilon = 1 \end{cases}$$

En este caso, el problema se reduce al de elegir ε, que es claramente una medida del grado de aversión a la desigualdad o de sensibilidad relativa a las transferencias a diferentes niveles de ingresos. A medida que aumenta ε, damos más importancia a las transferencias en el extremo inferior de la distribución y menos peso a las transferencias en la parte superior. El caso límite en un extremo es, que da lugar a la función que sólo tiene en cuenta las transferencias al grupo de ingresos muy bajo (y por lo tanto no es estrictamente cóncava); en el otro extremo tenemos, que da la función de utilidad lineal que clasifica distribuciones únicamente en función de la rentas totales.[4]

7. UNA ILUSTRACIÓN

Para ilustrar su trabajo Atkinson considera los datos recogidos por Kuznetz (1963) donde se muestra la distribución de la renta de siete países avanzados y cinco en vías de desarrollo, en aquel momento. Explica que esos datos han sido utilizados para intervenir en la controversia sobre si hay más desigualdad o no en la renta de los países en vías de desarrollo. Advierte que los cálculos que va a desarrollar son sólo a nivel ilustrativo, pues "son bien reconocidas las deficiencias de las cifras", por lo que no se debe extraer conclusiones definitivas.

Para llevar a cabo su objetivo propone en primer lugar analizar las curvas de Lorenz de los 12 países y efectuar comparaciones por parejas de dichas curvas, con objeto de ordenar distribuciones. Informa que en sólo 16 de las 66 comparaciones posibles las curvas no se cruzan y en esos casos podemos llegar a una ordenación sin especificar la forma de la función social de bienestar. Es sólo una cuarta parte de los casos. Por ello, comenta nuestro autor, Kuznetz ha concluido que la aplicación de las medidas resumen convencionales lleva a resultados conflictivos.

Entonces, presenta una tabla resumen usando tres de las medidas convencionales, el Índice de Gini, la desviación estándar de los logaritmos, y el coeficiente de variación, y comienza a señalar las discrepancias que surgen: por ejemplo, India aparece

[4] Cabe señalar que la medida es fácilmente descomponible si se desea medir la contribución de la desigualdad dentro y la desigualdad entre los subgrupos de la población.

como más desigual que Alemania Occidental según el coeficiente de variación, menos desigual según la desviación estándar de los logaritmos de las rentas, y se clasifican por igual si se considera el Índice de Gini. De hecho, las tres medidas coinciden en su ordenación en sólo 40 de las 66 posibles comparaciones, a las que substrayendo aquellas en las que las curvas de Lorenz no se cortan, concluye que en no más de la mitad de los casos dudosos se producen acuerdos de ordenación entre las tres medidas. Eso hace que ninguna conclusión clara se pueda extraer con respecto a la comparación del grado de desigualdad entre países desarrollados y en vía de desarrollo. Así, el Índice de Gini y el coeficiente de variación sugieren que la renta es más desigualmente distribuida en países desarrollados, pero esto no se ve confirmado por la desviación estándar de los logaritmos.

A la tabla, Atkinson le añade tres columnas donde calcula su propio índice para diferentes valores de. Entonces, se fija en algunos casos concretos: para el valor de su índice en Estados Unidos es 0,34. En otras palabras, si la renta estuviese igualmente distribuida, el mismo nivel de bienestar social se alcanzaría con sólo dos terceras partes del ingreso total (que a nivel de estado es una cifra impresionante). Añade que para otros países las cifras son aún menores. Por ejemplo, el caso de México se conseguiría con sólo la mitad. Señala que es importante examinar la sensibilidad de la medida ante cambios de. El rango de variación es considerable, pero I es menos sensible de lo que se podría haber esperado en un principio; por ejemplo, si acordamos que ε debe estar entre 1,5 y 2,0, entonces I estará entre 0,42 y 0,34. También es interesante notar que los beneficios potenciales de la redistribución son considerables en la mayor parte: para son más del 5% de la renta nacional y para, que son más de 20%.

En cuanto a la clasificación relativa de los diferentes países, podemos señalar en primer lugar que la última columna () da una clasificación idéntica a la de la desviación estándar de los logaritmos, pero que es muy diferente a la propuesta por el índice de Gini y el coeficiente de variación. De las 50 comparaciones por pareja, donde las curvas de Lorenz se cruzan, el índice de Atkinson con no coincide con el coeficiente de Gini en 17 casos y con el coeficiente de variación en no menos de 26 casos. Si tomamos, lo que implica un menor grado de aversión a la desigualdad, la ordenación está más cerca de la del índice de Gini (sólo en cinco casos sería diferente), pero sigue siendo bastante diferente de la del coeficiente de variación (14 desacuerdos).

Se desprende de este ejemplo que dos de las medidas convencionales (el índice de Gini y el coeficiente de variación) tienden a dar clasificaciones que son similares a las alcanzados con el índice de Atkinson con un grado relativamente bajo de aversión a la desigualdad (del orden de 1,0 o menos). Esto concuerda con el análisis de estas medidas en la sección anterior. También parece que las conclusiones sobre el grado relativo de desigualdad en los países avanzados y en desarrollo depende del grado de aversión a la desigualdad. Está claro por qué esto ocurre. La distribución del ingreso en los países en desarrollo suele ser más igualitaria en la parte inferior y menos igual en la parte superior que en los países avanzados, y que aquí aumenta el grado de aversión a la desigualdad, que da más peso a la distribución en el extremo inferior de la escala.

Tabla 1. Medidas de desigualdad convencionales e Índices de Atkinson para 12 países. Entre paréntesis orden de los países según esas medidas. Tabla extraída del artículo de Atkinson.

País	Índice de Gini	Desviación estándar de los logaritmos	Coeficiente de variación	Atkinson	Atkinson	Atkinson
India	0.410 (8=)	0.305 (3)	0.901 (11)	0.297 (7)	0.359 (5)	0.399 (3)
Ceylán	0.427 (10)	0.341 (6)	0.876 (10)	0.311 (10)	0.395 (6)	0.457 (6)
México	0.498 (12)	0.395 (12)	1.058 (12)	0.401 (12)	0.492 (12)	0.550 (12)
Barbados	0.436 (11)	0.383 (10)	0.842 (9)	0.315 (11)	0.433 (10)	0.524 (10)
Puerto Rico	0.394 (4)	0.317 (4)	0.783 (8)	0.256 (4)	0.341 (4)	0.408 (4)
Italia	0.378 (3)	0.301 (1)	0.748 (3)	0.241 (2)	0.319 (2)	0.379 (1)
Gran Bretaña	0.356 (1)	0.304 (2)	0.673 (1)	0.224 (1)	0.311 (1)	0.384 (2)
Alemania Oc.	0.410 (8=)	0.369 (8)	0.773 (6)	0.299 (8)	0.411 (8)	0.498 (8)
Holanda	0.406 (6=)	0.355 (7)	0.781 (7)	0.290 (5)	0.395 (7)	0.478 (7)
Dinamarca	0.401 (5)	0.381 (9)	0.751 (4)	0.292 (6)	0.418 (9)	0.521 (9)
Suiza	0.406 (6=)	0.393 (11)	0.752 (5)	0.303 (9)	0.435 (11)	0.540 (11)
Estados Unidos	0.372 (2)	0.325 (5)	0.705 (2)	0.242 (3)	0.339 (3)	0.421 (5)

8. CONCLUSIÓN

Atkinson concluye su trabajo comentando que ha examinado el problema de la medición de la desigualdad en la distribución del ingreso que, en la actualidad, generalmente, se aborda a través de la utilización de estadísticos resumen como el coeficiente de Gini, la varianza o la desviación media relativa. Dice que ha tratado de argumentar, sin embargo, que este método convencional del enfoque es engañoso, pues, en primer lugar, el uso de estas medidas a menudo sirve para ocultar el hecho de que una clasificación completa de las distribuciones no se puede alcanzar sin especificar completamente la forma de la función de bienestar social. En segundo lugar, el examen de las funciones de bienestar social implícitas en estas medidas muestra que en una serie de casos que tienen propiedades que son poco probables de ser aceptables, y en general no hay motivos para creer que estarían de acuerdo con los valores sociales. Por estas razones, nuestro autor espera que estas medidas convencionales sean rechazadas en favor de la consideración directa de las propiedades que nos gustaría que la función de bienestar social cumpla.

BIBLIOGRAFÍA

ATKINSON, A.B. (1970). 'On the measurement of inequality', *Journal of Economic Theory*, vol. 2(3), pp. 244-263.

DALTON, H. (1920). 'The measurement of the inequality of incomes', *Economic Journal*, vol. 30(119), pp. 348-361.

HADAR, J. and W. R. RUSSELL, W.R. (1969). “Rules for ordering uncertain prospects”, *Amer. Econ. Rev*. 59 (March 1969).
PIGOU, A.C. (1912). *Wealth and Welfare*, London: Macmillan.
PRATT, J.W. “Risk aversion in the small and large”, *Econometrica* 32 (January-April 1964).
SEN, A.K. (1973). *On Economic Inequality*, Oxford: Oxford University Press.
SEN, A (1978). *Sobre la desigualdad económica*. Editorial Crítica.

CAPÍTULO 7

LA REAL SOCIEDAD MATRITENSE DE AMIGOS DEL PAÍS, PIONERA EN LA ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA EN ESPAÑA

ANA I. BUSTO CABALLERO
IES Victoria Kent

Mª CARMEN ESCRIBANO RÓDENAS
Universidad CEU San Pablo

1. EL COMIENZO DE LAS SOCIEDADES ECONÓMICAS DE AMIGOS DEL PAÍS

Los ilustrados de la segunda mitad del siglo XVIII en su intento por sacar al país de la mala situación en la que encontraba, analizan el porqué de la decadencia española, llegando a la conclusión de que tal decadencia era debida a diversas causas entre las que se encuentran: la importación de manufacturas extranjeras, sobre todo textiles; el atraso de las artes y los oficios, en los que no se introducían los nuevos adelantos técnicos; la falta de formación de trabajadores cualificados que fueran mejorando la calidad de la producción y se especializaran en los nuevos oficios que iban surgiendo con los avances tecnológicos; y al mal funcionamiento de los diferentes gremios de oficios, estancados en sus conocimientos y en su manera de hacer las cosas y poco dispuestos a introducir nuevas ideas y a darlas a conocer al pueblo.

Para paliar este problema planean transformar y apoyar a los gremios para que puedan cumplir con su misión de fomentar la enseñanza e innovación de las artes y los oficios, y a la vez incentivar la creación de establecimientos no estatales de edu cación popular. Además, la tasa de analfabetismo en España era altísima. Por ejemplo, en 1803, Moreau de Jonnes[1] cifra esta tasa en España entorno al 94%[2].

Así, empiezan a surgir en España en el último tercio del siglo XVIII, las Sociedades económicas de amigos del país[3], estas Sociedades eran asociaciones locales formadas por nobles ilustrados, clérigos, burgueses y militares cuyo objetivo era difundir las ideas de la Ilustración y los nuevos conocimientos científicos y técnicos con el fin de fomentar las actividades económicas.

La primera en crearse fue la Real Sociedad Vascongada de Amigos del País, fundada en 1765 por iniciativa del Conde de Peñaflorida. Esta sociedad consiguió la cesión del colegio de Vergara, dirigido por los jesuitas, cuando éstos fueron expulsados en 1767, en el que habían fundado el Real Seminario de Nobles.

En 1773 se funda en Tudela (Navarra), la Real Sociedad Tudelana de los Deseosos del Bien Público y en 1774 se crea la Real Sociedad de Amigos del País de Baeza, en la provincia de Jaén.

Viendo los logros de estas Sociedades y la relevancia que podían tener en la educación del pueblo español, en este mismo año, 1774, Pedro Rodríguez de Campomanes, fiscal del Consejo de Castilla, a instancias de éste y con el permiso del rey Carlos III, envía una circular a las principales autoridades civiles y eclesiásticas de toda España, instándoles a fundar Sociedades Económicas.

Pedro Rodríguez de Campomanes

[1] Autor del libro publicado en Francia, *La Estadística de España*, que tradujo al español Pascual Madoz.
[2] Vilanova y Moreno (1992) pág. 68, *Atlas de la evolución del analfabetismo en España de 1887 a 1981*.
[3] Las primeras sociedades europeas de este tipo surgieron en Irlanda: Economic Society of Friends de Dublin (1762), y Suiza: Wirtschaftliche Gesellschaft von Freuden de Berna (1762).

Esta circular contenía un *Discurso sobre el fomento de la industria popular*, publicado en 1774, de 198 páginas. Unos meses después, el año siguiente, les hace llegar un documento similar, un *Discurso sobre la educación popular de los artesanos y su fomento* de 475 páginas.


DISCURSO
SOBRE EL FOMENTO
DE LA
INDUSTRIA
POPULAR.
DE ORDEN DE S.M.Y DEL CONSEJO.
MADRID. En la Imprenta de D. ANTONIO DE SANCHA. M.DCC.LXXIV.

DISCURSO
SOBRE LA EDUCACION
POPULAR
DE LOS ARTESANOS,
Y SU
FOMENTO.
EN MADRID.
En la Imprenta de D. ANTONIO DE SANCHA.
Año de M.DCC.LXXV.

Discursos de Pedro Rodríguez de Campomanes instando a las autoridades a formar Sociedades Económicas.

Para dar ejemplo, el 16 de septiembre de 1775 se inaugura oficialmente, en las Casas Consistoriales de Madrid, la Real Sociedad Económica de Amigos del País de Madrid (RSEM)[4]. Sus primeros estatutos fueron sancionados por el Rey Carlos III el 9 de noviembre del mismo año. A diferencia de las anteriores sociedades, la matritense tuvo origen oficial y sirvió de modelo para las que se fueron creando después por todo el país, su lema, que se puede leer en su escudo, fue y sigue siendo en la actualidad: "Socorre enseñando".

Escudo de la RSEM.

[4] También conocida como Real Sociedad Económica Matritense.

Las actividades de la Matritense se dividían en tres asociaciones o clases. La primera era clase de: agricultura, la segunda de industria, y la tercera de artes y oficios. Mientras la clase de industria se ocupaba de la creación de escuelas populares, la clase de artes y oficios dirigía las enseñanzas pre-profesionales de oficios y artesanales.

Las primeras escuelas populares o escuelas industriales, a las que también se llamaría escuelas patrióticas, se crean en 1776, eran escuelas de hilar, en ellas se enseñaba a trabajar las distintas fibras como el lino, el cáñamo, el algodón y la lana. Los alumnos de estas escuelas eran los ciudadanos más marginados de la sociedad, mendigos, "niños vagantes extranjeros", hijos de los soldados extranjeros, presidiarios…[5]. Los ilustrados pensaban que el aprendizaje de un oficio les haría ciudadanos honrados y útiles para la sociedad. En 1779 se crea la Escuela de Tejedoras, con el fin de aprovechar las materias primas que producen las escuelas de hilados. En 1782 se crean la Escuela de Encajes y la Escuela de Bordados[6]. Las mujeres y las niñas tenían preferencia, pues parecían más aptas para tejer que los hombres[7]. En 1785 se crea la escuela de Hilos Finos.

Las escuelas populares serían gratuitas y estarían sufragadas por las comunidades locales, a veces con las limosnas parroquiales. A los maestros se les daría una gratificación por cada discípulo que demostrase un buen aprovechamiento de la enseñanza, lo que incentivaría su buena docencia.

También se crean otras Escuelas, no llamadas populares, y entre ellas se pueden citar: la Escuela para el fomento de las primeras letras en 1790, la Escuela de Dibujo en 1781, la Escuela de Flores Artificiales[8] en 1796, la Escuela de Talabartería en 1780 y la Escuela de Adornos en 1802.

La Real Sociedad Económica de Amigos del país de Madrid también fue famosa por su enseñanza de la taquigrafía[9] y por la educación de los sordomudos[10], pero además tuvo otras atribuciones. Sostenía relaciones con otras instituciones dedicadas a la enseñanza, emitía informes al Consejo de Castilla sobre libros que se iban a publicar, convocaba concursos de memorias sobre educación y examinaba para la obtención de algunos títulos, como el de maestras de escuelas de niñas. En definitiva, la Matritense fue en aquellos momentos una importantísima institución al servicio

[5] Por esa razón creemos que se instaló en la llamada Casa de los Desamparados.

[6] La calidad de los trabajos de bordados realizados llevó a esta escuela a recibir encargos incluso de la familia real.

[7] Los ilustrados creían en la igualdad intelectual de hombres y mujeres, siendo la falta de educación de éstas lo que les hacía parecer más torpes. Pensaban que el trabajo de la mujer sería muy útil a la sociedad, de hecho, en la Matritense la mayoría de las enseñanzas estaban a cargo de mujeres.

[8] También llamada Escuela de la Reina.

[9] La Escuela de taquigrafía de la Matritense comenzó a impartir sus clases el 1 de septiembre de 1803. Posteriormente se incluiría también la enseñanza de la mecanografía. Los títulos de la Matritense para estas dos enseñanzas han seguido siendo válidos hasta finales del siglo XX.

[10] El Real Colegio de Sordomudos de Madrid, bajo la tutela de la Económica Matritense, se inauguró oficialmente el 9 de enero de 1805.

de la cultura y la economía españolas, no solo por sus logros sino por servir de modelo a otras Sociedades Económicas de nuestro país. Por ejemplo, en 1815, por encargo real, en ésta Sociedad Matritense se elaboraron los estatutos para todas las demás reales sociedades del reino.

A partir de 1833[11], la Matritense también se dedicó a la creación de escuelas de párvulos, a la enseñanza de adultos y a la creación de cátedras de carácter científico, así estableció cátedras de Astronomía, Matemáticas, Economía Política, Paleografía Diplomática Española, Fisiología y Patología vegetal, una cátedra del Sistema Métrico Decimal y una cátedra de Estadística. De la creación de esta última nos ocuparemos a continuación.

2. INTENTOS DE CREACIÓN DE UNA CÁTEDRA DE ESTADÍSTICA EN LA SOCIEDAD ECONÓMICA MATRITENSE

El primer documento que hemos encontrado respecto a la formación de una cátedra de Estadística en la Real Sociedad de Amigos del País de Madrid, data del día 6 de septiembre de 1820. Se trata de una carta de Francisco Grimaud de Belamonde[12] dirigida a "Ilmo. Sr." o "V. A." con tres mociones, la segunda de ellas dice textualmente:

"Hago igualmente moción para que nombrándose otra comisión informe a V. A. de las ventajas que deben resultar a la nación de instalarse cátedras de Estadística, ciencia tan necesaria, como desconocida..."

Como se puede esperar estas proposiciones son realizadas por los intelectuales españoles, que deben esperar a que sus propuestas cuajen oportunamente, después de insistir en diferentes ocasiones, así posteriormente, en 1835, Tomás Serrano Server, socio de la Matritense, propone al Ministerio del Interior crear en Madrid una cátedra de Estadística. Entonces la clase de Comercio[13] de la Sociedad Económica Matritense es requerida por dicho ministerio para emitir un informe sobre lo necesario y adecuado de aceptar tal petición.

Así lo indica el acta de la Matritense del día 7 de marzo de 1835[14]:

---

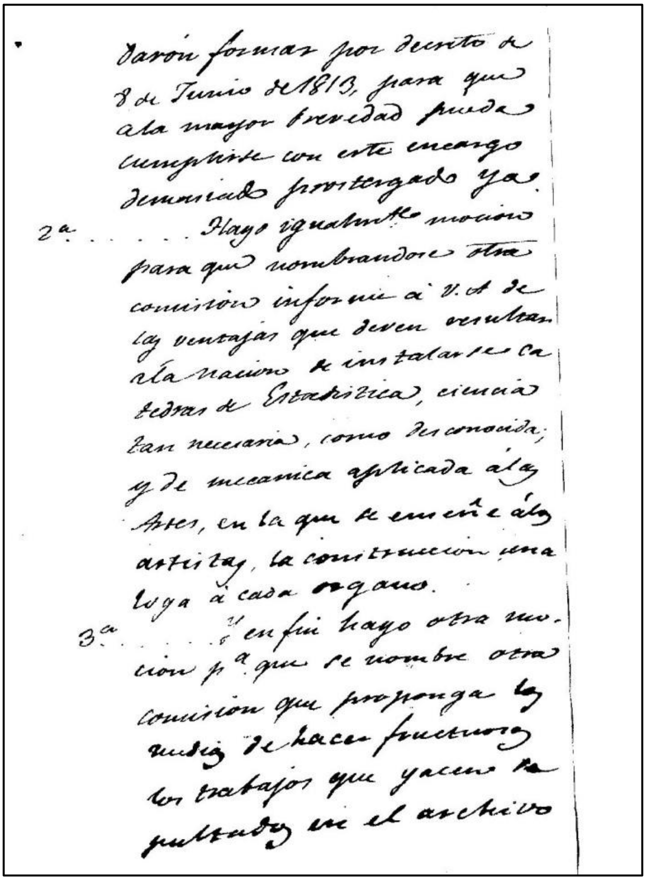
[11] El profesor Olegario Negrín Fajardo en la página 200 de su excelente libro *Veinticinco ensayos de historia de la educación española moderna y contemporánea*, nos indica que, debido a los acontecimientos políticos de la época, la Sociedad Económica Matritense no pudo desarrollar con normalidad sus actividades desde 1823 hasta 1833. Apoya su afirmación citando el documento 14 del legajo 304 del ARSEM, titulado "Memoria de las tareas de la Sociedad desde 1823 en que suspendió sus sesiones, hasta noviembre de 1833 en que fue reinstalada", leído en la sesión de 20 de diciembre de 1834 por D. Francisco López de Olavarrieta.

[12] ARSEM, legajo 288/27.

[13] A partir de 1816 las clases o asociaciones de la RSEM se denominan: Agricultura, Artes y Comercio.

[14] ARSEM, A/110/45.

"Ministerio de lo Interior.= Remito a V.S. de Real Orden para que la Real Sociedad Económica Matritense informe con devolución lo que se le ofrezca y parezca la adjunta exposición de Don Tomas Serrano Server en solicitud de que S.M. se digne crear en esta Corte una Cátedra de Estadística con arreglo a las bases que fija el interesado en la memoria que acompaña" [15].


darán formar por decreto de
8 de Junio de 1813, para que
a la mayor brevedad pueda
cumplirse con este encargo
demasiado postergado ya.
2ª. . . . . Hago igualmente moción
para que nombrándose otra
comisión informe á V.S. de
las ventajas que deben resultar
á la nación de instalarse Ca-
tedras de Estadística, ciencia
tan necesaria, como desconocida;
y de mecanica aplicada á las
Artes, en la que se enseñe á los
artistas, la construccion una
luego á cada organo.
3ª. . . . . y en fin hago otra mo-
cion p.ª que se nombre otra
comision que proponga los
medios de hacer fructuosos
los trabajos que yacen se-
pultados en el archivo

Página de la carta de Francisco Grimaud (6-9-1820).

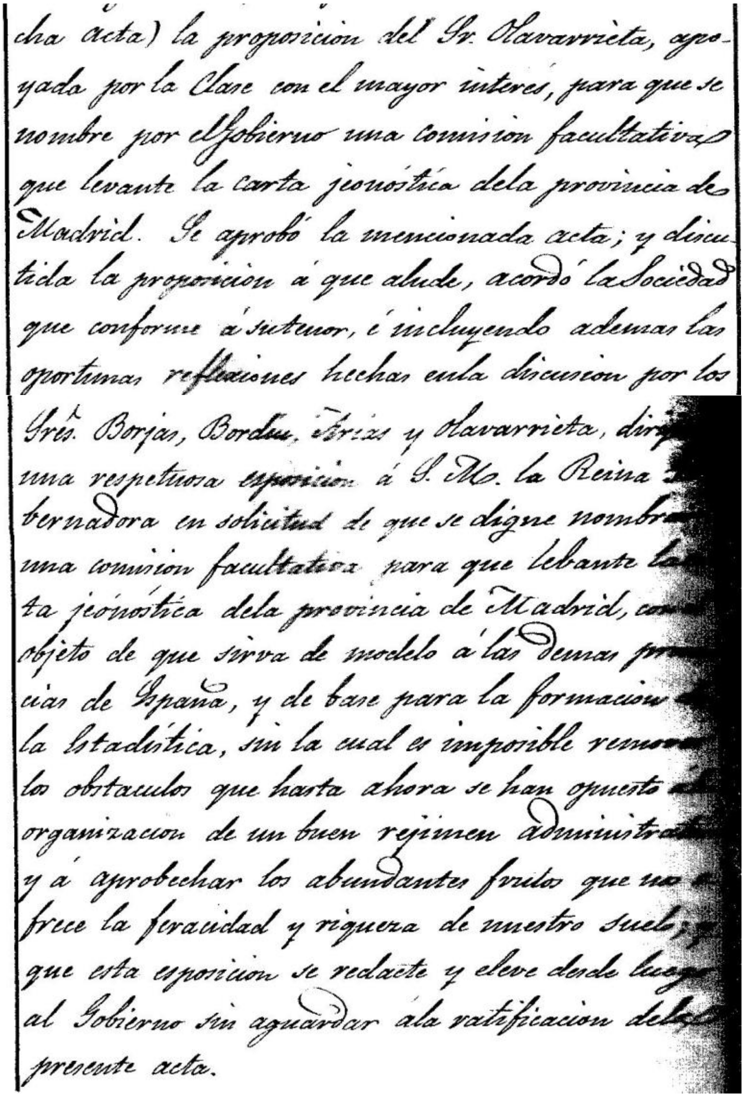
El acta de la reunión del 14 de marzo del mismo año hace alusión a la aprobación del acta de la clase de Comercio del día 12 de dicho mes en la que se encarga al Sr. Del Valle[16] de la elaboración de dicho informe y a la proposición del Sr. Olavarrieta,

[15] Esta memoria no se ha localizado.

[16] Eusebio Mª del Valle, Marqués de Valle Santoro (1799 1867?), fue catedrático de Economía política en la Sociedad Económica Matritense y catedrático de Economía política y Estadística en la Facultad de Filosofía de la Universidad Central desde el 23/6/1934. Ingresó en la Academia de la Lengua en

con el apoyo de la clase de Comercio, para que el Gobierno nombre una comisión facultativa que levante carta jeonóstica[17] de la provincia de Madrid.

Aprobada el acta del día 12 de marzo[18], y discutida la proposición del socio el Sr. Olavarrieta, el acta del día 14 del mismo mes, sigue diciendo:



cha acta) la proposicion del Sr. Olavarrieta, apo-
yada por la Clase con el mayor interes, para que se
nombre por el Gobierno una comision facultativa
que levante la carta jeonóstica dela provincia de
Madrid. Se aprobó la mencionada acta; y discu-
tida la proposicion á que alude, acordó la Sociedad
que conforme á su tenor, é incluyendo ademas las
oportunas reflexiones hechas enla discusion por los
Sres. Borjas, Bordiu, Arizas y Olavarrieta, dirij
una respetuosa esposicion á S. M. la Reina
bernadora en solicitud de que se digne nombr
una comision facultativa para que lebante la
ta jeonóstica dela provincia de Madrid, con
objeto de que sirva de modelo á las demas pro
cias de España, y de base para la formacion
la Estadística, sin la cual es imposible remo
los obstaculos que hasta ahora se han opuesto
organizacion de un buen rejimen administra
y á aprobechar los abundantes frutos que no
frece la feracidad y riqueza de nuestro suelo;
que esta esposicion se redacte y eleve desde luego
al Gobierno sin aguardar ála ratificacion dela
presente acta.

Una página del acta de la RSEM del 14/3/1835.

1834 como miembro honorario y en 1836 llegó a ser académico de número. Fue bibliotecario de esta institución desde 1849 a 1867.

[17] También puede escribirse geonóstica.

[18] ARSEM, A/110/45.

> *"…acordó la Sociedad que conforme á su tenor, é incluyendo además las oportunas reflexiones hechas en la discusión por los Sres. Borjas, Bordi, Arias y Olavarrieta, dirija una respetuosa esposición a S. M. la Reina Gobernadora en solicitud de que se digne nombrar una comisión facultativa para que lebante la carta jeonóstica de la provincia de Madrid, con el objeto de que sirva de modelo á las demás provincias de España, y de base para la formación de la Estadística, sin la cual es imposible remover los obstáculos que hasta ahora se han opuesto a la organización de un buen rejimen administrativo y á aprovechar los abundantes frutos que nos ofrece la feracidad y riqueza de nuestro suelo; y que esta esposicion se redacte y eleve desde luego al Gobierno sin aguardar a la ratificación de la presente acta".*

El informe de la clase de Comercio sobre la creación de la cátedra de Estadística fue negativo, no se estima necesaria dicha cátedra, ya que se la confunde con la Economía Política, pues algo de Estadística se impartía en esta materia. Se nos dice textualmente:

> *"…la teoría de la estadística está tan enlazada con la Economía política, que se puede decir que aquélla es una sección de ésta, por lo cual más bien que crear una cátedra especial de Estadística importa extender el establecimiento de las cátedras de Economía Política"*[19].

Sin embargo, y debido a la insistencia de algunos socios, poco después, por Real Orden de 22 de noviembre de 1836[20] se comunica a la Sociedad el establecimiento de una cátedra de Estadística en el mismo local en que se impartía Economía Política, la citada cátedra estaría a cargo de Tomás Serrano Server, puesto que por Real Orden de 10 de marzo de 1836 la cátedra de Economía Política de la Matritense había pasado a San Isidro a cargo de la Dirección General de Estudios[21].

Pero según el profesor Negrín Fajardo:

> *"A partir de este momento, la Sociedad devolvió el local en el que se impartían las enseñanzas de la Taquigrafía y la Economía industrial al Colegio de Sordomudos, pasando dichas enseñanzas a ocupar el local que estaba destinado para la Economía política, a pesar de ser muy reducido"*[22].

En ese momento no se pudo cumplir el mandato ministerial, la cátedra de Estadística quedó sin establecerse.

[19] ARSEM, A/110/46.
[20] Acta de la RSEM de 3/12/1836.
[21] ARSEM, A/110/46.
[22] Negrín Fajardo, O, (2005): *Veinticinco ensayos de historia de la educación española moderna y contemporánea*, pág. 202. UNED, Madrid.

3. LA CÁTEDRA DE ESTADÍSTICA DE LA MATRITENSE

La creación de la primera cátedra de Estadística española, está ligada de alguna manera a la figura de Pascual Madoz e Ibáñez (1806-1870), conocido por su impresionante *Diccionario Geográfico-Estadístico-Histórico de España y sus posesiones de Ultramar,* obra de dieciséis tomos a la que dedicó siete años de su vida, de 1843 a 1850.

Pascual Madoz

Entre los cargos que ostentó están el de juez de Primera Instancia, gobernador del Valle de Arán, diputado por la provincia de Lérida, vicepresidente del Congreso de los Diputados y ministro de Hacienda. Madoz se relacionó con los más importantes estadísticos de su tiempo, como Quetelet[23] y Moreau de Jonnes, de quien tradujo del francés la *Estadística de España.*

En 1843 se le nombra a Madoz presidente de una Comisión de Estadística, posición que aprovecha para proponer al Gobierno la creación de varias cátedras de Estadística, su proposición, rechazada por el Gobierno, es sin embargo aceptada por la Sociedad Económica de Amigos del País de Madrid de la que es miembro.

[23] Adolphe Lambert Adolphe Jacques Quetelet (1796-1874) astrónomo y estadístico belga creador e impulsor de los congresos internacionales de estadística (Escribano y Fernández, 2004). También puede verse su influencia en España en Busto, Escribano y Fernández, 2015.

Diccionario Geográfico-Estadístico-Histórico de España y sus posesiones de Ultramar

En la página 819 del Tomo X del *Diccionario* de Madoz, bajo la palabra Madrid, se nos dice:

> "*Cátedra de Estadística (calle del Turco*[24]*, número 9). La Sociedad Económica, a propuesta de varios individuos de su seno, estableció en 1844 esta útil enseñanza desconocida hasta entonces en nuestras escuelas: graves fueron las dificultades que hubo de vencer y, entre ellas, la de hallar persona idónea que por primera vez emprendiese esta clase de educación. Pero afortunadamente recayó la elección en nuestro recomendable amigo don José María Ibáñez, uno de sus socios y vocal secretario (a propuesta nuestra) de la Comisión de Estadística, creada por real decreto de 21 de agosto de 1843. El señor Ibáñez no pudo menos de acceder a las instancias de la sociedad y, encargado de esta cátedra, se vio precisado a dar a luz una obra elemental en la que prescindiendo de opiniones y sistemas en general, presenta los principios más esenciales y su aplicación a la práctica, indicando los diversos y multiplicados objetos a que deben dirigirse las investigaciones del estadista. Más aún, antes de la publicación de esta obra se instaló la cátedra, cuya apertura tuvo efecto en sesión pública celebrada el día 1º de diciembre del citado año y para cuyo curso fueron 38 los individuos matriculados que continuaron con eficaz asistencia y bastante aprovechamiento los dos cursos académicos que terminaron en 1846. Posteriormente, y con auxilio del libro de texto, se da un curso completo cada año, asistiendo en el presente (1848) 22 matriculados y un considerable número de oyentes. Es de desear,*

[24] La antigua calle del Turco en Madrid se llama en la actualidad calle del Marqués de Cubas.

y nos consta, se tiene solicitado que el Gobierno dé a este estudio un carácter público, según los da a los de Economía política y Administración, parte integrante de estas ciencias".

Como acabamos de ver, la primera cátedra de Estadística española nace en el seno de la Sociedad Económica de Madrid en 1844, siendo su primer catedrático José María Ibáñez y Ramos. Poco después de establecida la cátedra el profesor Ibáñez escribe el libro titulado *Tratado elemental de Estadística, así en la parte filosófica y de teoría, como en la aplicación de sus principios a la práctica,* que, como indica en su portada, *está redactado con arreglo a las lecciones explicadas en la cátedra de dicha ciencia, establecida por la Sociedad Económica Matritense*.

El interés de la esta Sociedad Económica Matritense por la Estadística iba más allá del establecimiento de la citada cátedra. Dicha Sociedad estaba al día de los acontecimientos importantes que ocurrían a nivel internacional en lo referente a la Estadística, como prueba de ello, uno de sus socios, Mariano Marcoartu, el 22 de octubre de 1853 escribe una carta a la Junta de la Sociedad sobre el Congreso de Estadística de Bruselas. En ella dice:

"Celebrase en estos días el gran congreso de Estadística en Bruselas del que es individuo nuestro consocio D. Ramón de la Sagra. Esta Sociedad conoce mui bien el atraso lamentable en España respecto de Estadística y la imposibilidad absoluta de adelantos en todos los ramos de la administración pública por la falta de tan fundamental institución en el orden administrativo. Por tanto tengo el honor de proponer a la sociedad se sirva dirigirse al expresado de La Sagra rogándole se sirva dirigirla los documentos que estime mas convenientes para dar la idea mas cabal posible de los trabajos del citado Congreso, para gobierno de esta sociedad y para sus tareas ulteriores"[25].

El 7 de octubre de1856 fallece el profesor Ibáñez, y un mes después, el 8 de noviembre, la Junta de la Sociedad acuerda constituir una Comisión de la cátedra de Estadística, la forman A. de Salvatierra, E. Mª del Valle, M. Marcoartu, J. Adame y J. de Dios Navarro. Esta comisión decide que el profesor Mariano Marcoartu pase a encargarse desde ese momento de la cátedra de Estadística de la Matritense.

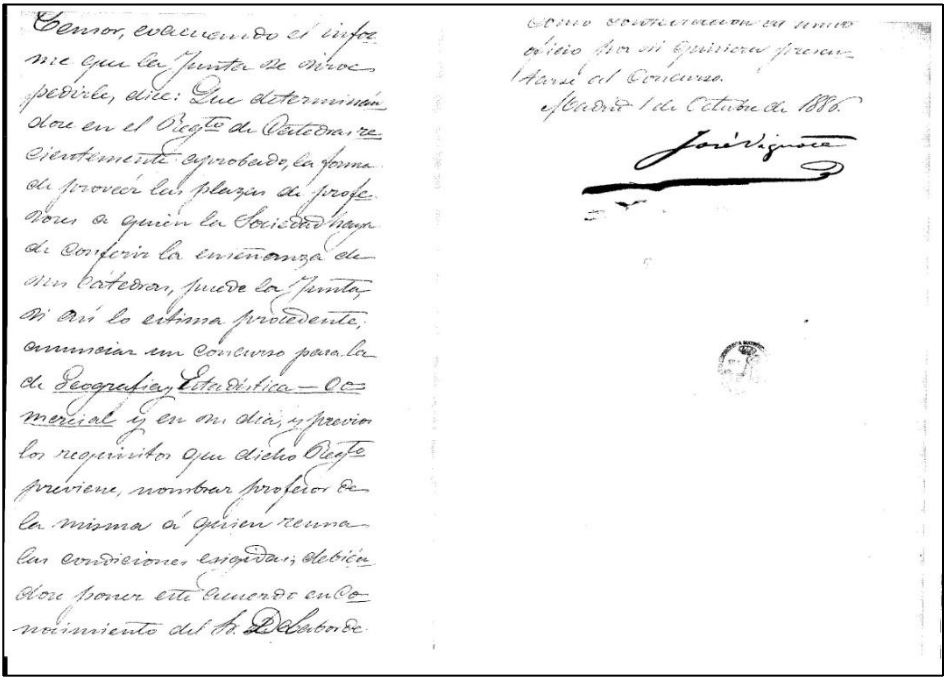
Existen dos documentos[26] que nos indican que en 1886 existía en la Matritense una cátedra de Geografía y Estadística comercial. Uno de ellos es un oficio de D. Enrique Delaborde Hurbise ofreciéndose para impartir las enseñanzas de dicha cátedra gratuitamente. El otro, es una carta de D. José Vignola al Censor de la Sociedad, fechada en Madrid a 1 de octubre de 1886, en la que expone:

"Que determinándose en el Reglamento de Cátedra, recientemente aprobado, la forma de proveér las plazas de profesores a quien la Sociedad haya

---

[25] ARSEM, legajo 431/11.
[26] ARSEM. Legajo 626/4.

de conferir la enseñanza de sus cátedras, puede la Junta, si así lo estima procedente, anunciar un concurso para la de Geografía y Estadística- comercial y en su dia, y previos los requisitos que dicho Reglamento previene, nombrar profesor de la misma á quien reuna las condiciones exigidas; debiéndose poner este acuerdo en conocimiento del Sr. Delaborde como contestación a su oficio por si quisiera presentarse al concurso."



Señor, evacuando el infor-
me que la Junta se sirve
pedirle, dice: Que determinán-
dose en el Reglto de Cátedras re-
cientemente aprobado, la forma
de proveer las plazas de profe-
sores á quien la Sociedad haya
de conferir la enseñanza de
sus cátedras, puede la Junta,
si así lo estima procedente,
anunciar un concurso para la
de Geografía, Estadística – Co-
mercial y en su dia, y previos
los requisitos que dicho Reglto
previene, nombrar profesor de
la misma á quien reuna
las condiciones exigidas; debién-
dose poner este acuerdo en co-
nocimiento del Sr. Delaborde
como contestacion á su
oficio por si quisiera presen-
tarse al Concurso.
Madrid 1 de Octubre de 1886.
José Vignola

Carta de D. José Vignola respecto al concurso para profesor de la cátedra de Geografía y Estadística comercial

4. LA SOCIEDAD ECONÓMICA MATRITENSE HOY EN DÍA

En 1866 Leopoldo O'Donnell[27] trasladó la Matritense a la conocida Torre de los Lujanes[28], edificio situado el centro de Madrid, en la Plaza de la Villa, número dos, con la entrada por la calle del Codo, donde hoy sigue prestando sus servicios a los vecinos de Madrid.

[27] Presidente del Consejo de Ministros de la Reina Isabel II.

[28] Datada a principios del siglo XV es uno de los edificios más antiguos de Madrid. Su nombre deriva del camarero del rey, D. Juan de >Luján que la compró en 1450. Es de estilo mudéjar con puerta de herradura en la calle del Codo. A principios del siglo XIX era uno de los edificios más altos de la ciudad.

Plaza de la Villa, a la izquierda la Torre de los Lujanes.

Salón de actos de la Matritense.

El retrato de Carlos III del famoso pintor Mengs preside el salón de actos de la Real Sociedad Económica de Amigos del País de Madrid que sigue siendo un lugar de celebración de eventos, conferencias, etc.

Retrato de Carlos III de Mengs en la Real Sociedad Económica Matritense.

Actualmente la Real Sociedad Económica de Amigos del País de Madrid, institución de largo arraigo e importancia en nuestro país, se encuentra en una dramática situación. Esta situación es debida a la desaparición de ciertos cursos que se impartían, en la mayoría de los casos por integrarse éstos de forma reglada en el actual sistema educativo español[29], y a la crisis económica de los últimos años en España, se han ido reduciendo poco a poco sus ingresos, ya que en los últimos tiempos se han retirado casi todas las subvenciones que recibía, y las cuotas de los socios no llegan para pagar ni siquiera a los pocos empleados que mantienen la actividad. La Sociedad ha tenido que vender un local del que era propietaria, en la calle del Espejo de Madrid, para poder hacer frente a las nóminas. Ahora se pueden efectuar visitas guiadas al edificio de la Torre de los Lujanes, que está cedido por el Ayuntamiento de Madrid a la Sociedad, y también se puede alquilar su magnífico salón de actos para diferentes eventos culturales. Necesitan ampliar el número de socios o un mecenas que se interese por ella y esté dispuesto a patrocinarla para que no desaparezca, ya que los ingresos disponibles no son suficientes para su mantenimiento.

[29] A partir de la ley General de Educación del ministro Villar Palasí de 1970, la educación en España se ha ido haciendo realmente obligatoria para todos los niños en edad escolar.

BIBLIOGRAFÍA

AGUILAR PIÑAL, F. (1972): *La Real Sociedad Económica Matritense de Amigos del País.* Artes Gráficas Municipales. Madrid.

Archivo de la Real Sociedad Económica Matritense (ARSEM), legajo 288/27.

ARSEM. Legajo 431/11.

ARSEM. Legajo 626/4.

ARSEM, Actas /110/45.

ARSEM, Actas /110/46.

BUSTO CABALLERO, A.I., ESCRIBANO RÓDENAS, M.C.; FERNÁNDEZ BARBERIS, G.M. (2015): "La huella de Quetelet en la Estadísticas Española" en *Historia de la Estadística y Probabilidad VII* A.H.E.P.E. Delta Publicaciones. 101-115

ESCRIBANO, M.C.; FERNÁNDEZ, G. (2004): "Participación española en las primeras reuniones internacionales de Estadística". *Historia de la Probabilidad y la Estadística II*. A.H.E.P.E. Delta Publicaciones. 401-416.

LESEN MORENO, J. (1863): *Historia de la Sociedad Económica de Amigos del País de Madrid.* Imprenta del Colegio de Sordo-Mudos y de Ciegos, Madrid.

MADOZ, P. (1845-1850): *Diccionario geográfico-estadístico-histórico de España y sus posesiones de Ultramar.* Estudio Literario-Tipográfico de P. Madoz y L. Sagasti, calle de la Madera Baja, 8. 16 tomos.

NEGRÍN FAJARDO, O. (2005): *Veinticinco ensayos de historia de la educación española moderna y contemporánea*. UNED, Madrid.

PALMA GARCÍA, D. (1984): "Las escuelas patrióticas creadas por la Sociedad Económica Matritense de Amigos del País en el siglo XVIII", en "*Cuadernos de Historia Moderna y Contemporánea"*, vol. 5. Universidad Cornplutense. Madrid.

RODRÍGUEZ DE CAMPOMANES, P. (1774): *Discurso sobre el fomento de la industria popular*. Imprenta de D. Antonio de la Sancha.

RODRÍGUEZ DE CAMPOMANES, P. (1775): *Discurso sobre la educación popular de los artesanos y su fomento*. Imprenta de D. Antonio de la Sancha.

SÁNCHEZ-LAFUENTE FERNÁNDEZ, J. (1975): *Historia de la Estadística como ciencia en España.* Tesis Doctoral.

VILANOVA, M. y MORENO, X. (1992): *Atlas de la evolución del analfabetismo en España de 1887 a 1981*. Premio Nacional de Investigación e Innovación educativas del CIDE. Ministerio de Educación y Ciencia nº 72. Colección Premios. Madrid.

CAPÍTULO 8

LA ESTADÍSTICA CONTRACTUAL DE 1931 A 1945

JUAN CARLOS MARTÍNEZ ORTEGA
Doctor en Derecho y Abogado

1. INTRODUCCIÓN

Los libros de historia están repletos de grandes figuras relevantes de la Estadística del siglo XIX, como Gauss o Laplace, por citar a algunos. Pero es innegable que muchos otros profesionales contribuyeron al establecimiento de la Estadística como disciplina separada de las Universidades.

Generalmente, se omite entre tales profesionales que coadyuvaron al establecimiento y fortalecimiento en la estadística a los Notarios, una figura de relieve histórico, de alto prestigio social y cualificación jurídica.

Como comprobaremos a continuación, en el último tercio del siglo XIX, algún Notario dibujó lo que debía ser la Estadística contractual notarial que recogiera la intervención de los fedatarios públicos en los contratos firmados ante él.

Los protocolos notariales que nos transportan al siglo XII, son testigos de las operaciones jurídicas extrajudiciales de las personas durante siglos, de sus inquietudes plasmadas en testamentos, de las transacciones económicas, de los compromisos adquiridos, etc., en suma, constituyen una visión real de cómo era la vida de nuestros antepasados.[1]

Todos esos datos no empezaron a documentarse estadísticamente hasta primeros del siglo XX, lo que supuso un notable avance para realizar evaluaciones certeras de

[1] Conviene aclarar que "Se entiende por protocolo la colección ordenada de las escrituras matrices autorizas durante un año y se formalizarán uno o más tomos encuadernados". Art. 17, párrafo 1.9 de la Ley del Notariado.

la situación contractual económica en nuestro país, así como para delimitar la demarcación notarial y la ampliación o no de las Notarías en todo el territorio.[2]

La presente exposición trata de descubrir al lector cómo la institución notarial fue pionera en la *Estadística contractual* en nuestro país, de cuya trascendencia hay huella palpable, debidamente documentada que los historiadores estadísticos no pueden omitir, pues no existe una base de datos tan documentada y veraz en esta materia al ser exclusiva del Notariado.

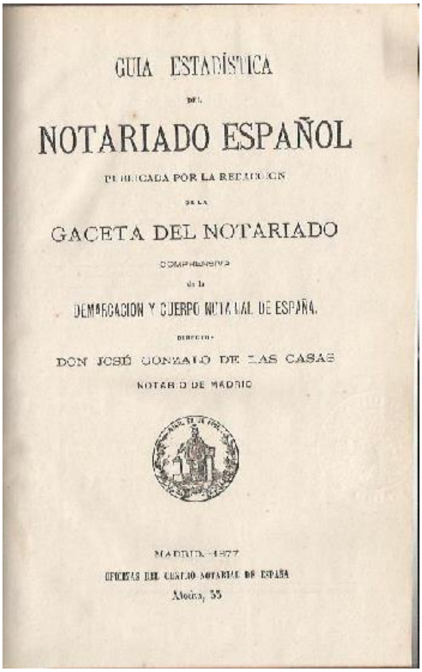
2. EL PRECURSOR DE LA ESTADÍSTICA NOTARIAL: GONZALO DE LAS CASAS

Uno de los más prestigiosos Notarios del siglo XIX es José Gonzalo de las Casas y Quijano, conocido por su primer apellido compuesto Gonzalo de las Casas. Nació en las Casas de Ciempozuelos (Madrid), el 21 de enero de 1826, hijo de Tiburcio Gonzalo de las Casas, empleado de la Administración de la Real Acequia del Jarama, y de Juana Quijano. Este ilustre Notario, podemos afirmar que fue el precursor o padre de la Estadística contractual notarial, quien utilizó por primera vez la expresión *Estadística contractual.*

Retrato de José Gonzalo de las Casas que figura en la Galería de Decanos del Colegio Notarial de Madrid

[2] Art. 72 y siguientes del Reglamento Notarial.

Estudió Gonzalo de las Casas la Carrera del Notariado en la Escuela de Madrid, destacándose rápidamente por sus trabajos y publicaciones, así como por sus continuas colaboraciones. Podemos destacar la fundación y dirección del *Boletín Semanario del Notariado* en 1852, al que siguió la *Gaceta del Notariado Español,* que perduró hasta el año 1934. Fundó también la Biblioteca del Notariado y, finalmente, destacar la monumental publicación entre los años 1853 y 1857 del *Diccionario General del Notariado de España y Ultramar,* dividido en diez tomos, con 5.063 páginas. Por dos veces fue Decano del Ilustre Colegio Notarial de Madrid.


GUIA ESTADÍSTICA
DEL
NOTARIADO ESPAÑOL
PUBLICADA POR LA REDACCION
DE LA
GACETA DEL NOTARIADO
COMPRENSIVA
de la
DEMARCACION Y CUERPO NOTARIAL DE ESPAÑA.
DIRECTOR
DON JOSÉ GONZALO DE LAS CASAS
NOTARIO DE MADRID
MADRID.—1877

Precisamente, en la citada Gaceta del Notariado se publicó en el año 1877, la primera *Guía Estadística del Notariado Español*, donde Gonzalo de las Casas dibujaba o marcaba la pauta a seguir por la institución notarial en materia estadística, cuya ciencia estaba emergiendo en la sociedad. De hecho, afirmó: *"El mejor medio de estudiar el estado de las Naciones y de las cosas que se relacionan con la buena organización social, es la Estadística. – La Estadística que todo lo abarca, que todo lo descompone, que todo lo aprecia, es, puede decirse, la ciencia madre que demuestra á los Legisladores y á los Gobiernos la situación presente, la historia del pasado y la conveniencia de las medidas y las Leyes que deben dictarse para el porvenir con arreglo al estado moral y social que nos presenta"*.[3]

[3] GONZALO DE LAS CASAS, J. *Guía Estadística del Notariado Español*. Publicada por la Gaceta del Notariado. Madrid, 1877.

En esta obra, Gonzalo de las Casas remachó que para poder organizar al cuerpo notarial, saber cuántas notarias precisa el Estado para que los Notarios tuviesen un digno sustento, la vía para hacerlo era "*la formación de la Estadística contractual*", y para eso, en dicho libro, ensayó un modelo de estudio del protocolo de su propia notaría en Madrid.

Tal experimento consistía en consignar el número de contratos autorizados en una Notaría, así como sus clases y la importancia de la riqueza que originasen los mismos. Dichos datos también serían de valor respecto al Tesoro público, así como el papel sellado invertido y los derechos del Estado.

ESTADÍSTICA CONTRACTUAL

DE LA

NOTARIA DE MADRID

de

DON JOSE GONZALO DE LAS CASAS Y QUIJANO

DIRECTOR DE LA GACETA DEL NOTARIADO

EN 1876.

PROTOCOLO.

Durante el año de 1876 se otorgaron en dicha Notaría 247 instrumentos públicos con 2.374 fólios, que arrojan el resultado siguiente:

I.

Clasificacion de los contratos.

A

CONTRATOS Y ACTOS UNILATERALES.	NUMERO de instrumentos.
Actas notariales sobre hechos	2
Codicilos	1
Cesion de derechos	2
Declaraciones de derechos	1
Licencias maritales á favor de mujeres casadas para contratar	2
Poderes generales	14
——— especiales	56
——— para pleitos	25
Presentaciones de beneficios eclesiásticos	1
Protestos por falta de pago	2
Requerimientos al pago de créditos	1
Renuncia de derechos personales	1
Sustitucion de poderes	14
Testamentos nuncupativos	22
TOTAL	144

De manera, que Gonzalo de las Casas en este libro ensayó un sistema de Estadística contractual que se impondría con la llegada del siglo XX, veintitrés años después.

La configuración de la actuación notarial, tal como la conocemos hoy, quedó definida en la Ley del Notariado de 28 de mayo de 1862[4], dictada por la Reina Isabel

[4] Publicada en la Gaceta de 29 de mayo de 1862.

II. En aquellos años, España contaba con quince millones y medio de habitantes censados, de los cuales una quinta parte estaba alfabetizado, de los que 700.000 eran mujeres. Fue en ese momento, donde se reguló la profesión del Notario, concretando su doble vertiente de funcionario público y profesional del derecho, facetas que perduran en la actualidad.

La iniciativa de Gonzalo de las Casas en el aspecto estadístico fue desarrollándose con el tiempo y justamente, con el cambio al siglo XX, la Dirección General de los Registros y del Notariado, en los Anuarios que empezó a publicar, incluyó desde el año 1905, una incipiente Estadística nacional de la contratación que se realizaba en las Notarías de España. El primer tomo se ocupaba de los años 1900 a 1904, y de forma sencilla daba información únicamente del número de instrumentos públicos autorizados por cada Notario y el número total de folios utilizados.

Esta información se fue ampliando con los años a todos los diferentes tipos de contratos intervenidos por los fedatarios públicos, descomponiéndose en trece secciones o epígrafes con distinta información, cuyo esquema ha perdurado hasta hace poco tiempo. Estos epígrafes, dibujados en tablas, marcaban las siguientes materias:

1. Actos referentes al estado civil.
2. Actos de última voluntad.
3. Contratos por razón de matrimonio.
4. Contratos en general.
5. Manifestaciones y particiones de herencia.
6. Constitución, modificación y disolución de Sociedades civiles y mercantiles.
7. Préstamos y reconocimiento de deudas simples, pignorativas o hipotecarias.
8. Cartas de pago y extinción de obligaciones.
9. Poderes de todas clases.
10. Protestos de documentos de giro.
11. Actas en general.
12. Número total de instrumentos autorizados durante el año.
13. Número total de folios que comprenden.

Toda la información se recababa a través de la confección mensual que realizaban los Notarios y, que subsiste hoy, aunque tales informaciones han sido notablemente ampliadas en un Índice Único con una exhaustiva y variable lista de datos que reciben las Administraciones públicas. Estos índices antes y ahora se remiten a los respectivos Colegios Notariales existentes en España, en la actualidad 17, uno por Comunidad Autónoma.[5]

[5] La obligación de remitir los Índices data de 1862, cuando se promulgó la Ley del Notariado, los cuales hasta la reciente era informática había que cumplimentarlo por el personal de la Notaría a mano. Esos

El único cambio en la configuración de los citados Anuarios es el escudo que figura en su primera página, el de la República en los años 1932 a 1935, el Escudo franquista en los restantes años hasta llegar a nuestro sistema democrático y constitucional vigente. El resto del contenido, la forma, estructura y las Resoluciones dictadas por la Dirección General de los Registros y del Notariado no sufrieron cambio alguno durante muchos años, hasta la implantación de altos sistemas informáticos.

Es de destacar que, durante el periodo bélico de 1936 a 1939, no se publicaron los citados Anuarios y, por tanto, ninguna Estadística, aunque los datos sí existían, ya que se seguían remitiendo los índices mensualmente por cada Notario. Por este motivo, la estadística de esos cuatro años se publicó tras la guerra en el año 1944, en un solo tomo.

Hoy, el Notariado español dispone de una herramienta informática de gran nivel, mediante su Centro de Información Estadística del Notariado, que desmenuza cada cifra y cada dato contractual realizado en nuestro país. En la página web: www.notariado.org se puede investigar la tremenda actividad que los cerca de tres mil notarios realizan cada año en nuestro país.

No en vano, como recientemente ha manifestado el Presidente del Consejo General del Notariado, José Manuel García Collantes "*Por nuestros despachos desfila la vida privada de las personas con sus momentos de alegría y tristeza, de gozo y preocupación. De ahí que en nuestros documentos quede recogida la historia personal de cada uno de los ciudadanos y, al final, de España entera*"[6].

3. DE LAS EXPECTATIVAS DE LA II REPÚBLICA A LA DICTADURA DE FRANCO

Antes de interpretar la Estadística notarial y contractual de este periodo, es preciso, hacer una somera introducción a unos años convulsos de nuestra historia, y cada cifra y dato reflejado en los índices notariales supone una fotografía de la realidad histórica de aquéllos años.

En este periodo, por el Decreto de 29 de abril de 1931, se declaró de forma contundente y explícita la admisión de las mujeres en las oposiciones a Registros y Notarías, acceso denegado hasta esa fecha y cuyos cuerpos de profesionales, estaban constituidos únicamente por varones.

índices que contenían, como alude el art. 33 de la Ley del Notariado, una reseña de cada instrumento, el nombre de los otorgantes, de los testigos, la fecha de otorgamiento y el objeto del acto o contrato, protocolizándose con el último tomo anual del protocolo general que contiene las escrituras.

[6] GARCÍA COLLANTES, J.M. "Vuestros compañeros de viaje". Escritura Pública. Nº 94. Julio-agosto de 2015, p. 7.

Como sostienen García de Cortázar y Martín de la Guardia: "*Durante la Guerra Civil los notarios fueron identificados por las fuerzas revolucionarias como los celosos guardianes del sistema capitalista, en su calidad de legitimadores a través de los actos jurídicos, y, por tanto, una clase especialmente odiosa que debía desaparecer*".[7] Tal pensamiento, de los más radicales y antisistema no encuentran justificación alguna. El Notario, de entonces y de ahora, ejerce un ministerio público de servicio a los ciudadanos, limitándose su actuación a la prestación de asesoramiento jurídico legal, no implicándose en la actuación política de turno, ni tomando partido ideológico o de otro tipo, se le exige plena imparcialidad.[8]

En los años treinta, los notarios no fueron una excepción al sufrimiento y persecución. De hecho, en distintas regiones fueron asesinados numerosos notarios[9].

El 14 de abril de 1931 vio la luz la II República Española, que como escribió Antonio Machado "Con las primeras hojas de los chopos y las últimas de los almendros, la primavera traía nuestra República de la mano", reinando un alborozo generalizado en la población, en sus plazas y rincones, pese a lo cual la II República nació frágil, y el desencanto pronto se vislumbró en los hombres y mujeres de aquella época. Este periodo democrático se desarrolló entre constantes desórdenes y alteraciones de la Constitución republicana de 1931, que vio suspendidas sus garantías en muchas ocasiones, reinando un ambiente de huelgas, motines e intentos de sublevación contra los sucesivos gobiernos republicados de Azaña, Lerroux y Martínez Barrios.

Las más de mil Notarías existentes en los años treinta en España, constituían un núcleo público donde se redactaban miles de documentos de los que antes hemos hecho mención, contando con personal comprometido y cualificado.

Para el régimen franquista el notario constituía una figura muy relevante, aureolada de gran dignidad, que unida a los principios de seguridad, orden y tradición le convertían en un colaborador necesario para el establecimiento de la paz social buscada después de la contienda.

Al poco de terminar la guerra, en la reunión de junio de 1940, se abordó cómo modernizar el Notariado, y entre las medidas adoptadas estuvo conservar la notaría

[7] García De Cortázar, F., y Martín de la Guardia, R. (2012). *Comparece: España*. Madrid: Espasa, p. 266.

[8] No en vano, como determina el art. 348, letra i) se considera infracción muy grave "Toda actuación profesional que suponga discriminación por razón de raza, sexo, religión, lengua, opinión, lugar de nacimiento, vecindad o cualquier otra condición o circunstancia personal o social."

[9] Durante la contienda, la Comisión de Justicia se vio obligada a publicar en el BOE el 7 de noviembre de 1936 que las notarías, demarcadas en el territorio tomado por las fuerzas franquistas y pertenecientes a colegios cuya capital estuviera en poder la República, quedaran incorporadas transitoriamente al colegio más cercano.

en todas las cabezas de partido judicial o autorizar el uso de la máquina de escribir para elaborar escrituras matrices.[10]

Por el Decreto de 2 de junio de 1944, se aprobó el vigente Reglamento Notarial, que tenía unas mínimas diferencias con respecto a su antecesor de la República de 1935. Aunque, claro está, el artículo 6º del nuevo Reglamento negaba otra vez a las mujeres la posibilidad de ingresar en el cuerpo de Notarios. Hubo que esperar hasta el año 1944, cuando Margarita Baudín ganó la oposición y tomo posesión ese mismo año: "*Después de la guerra se decidió que las mujeres no podíamos ser notarios, ni registradores, ni jueces, entre otras profesiones*", aunque se concedieran tres convocatorias para poder presentarse. Como recuerda esta Notaria, en 1942 aprobó Consuelo Mendizábal y en 1947, Carolina Bono.[11]

4. ESTADÍSTICA CONTRACTUAL ESPAÑOLA DE 1931 A 1945

Algunos autores han afirmado que la guerra civil española supuso un retroceso económico de más de veinte años, sin entrar a valorar, en este momento, el retraso social y democrático que ello significó para las generaciones venideras, amén del aislamiento internacional que perduraría durante décadas.

En aquellos años el Notariado español contaba con quince Colegios Notariales, que aglutinaban a los mil y pico notarios existentes y distribuidos por todo el territorio nacional.

Esos Colegios Notariales se ocupaban de toda la actuación y vida corporativa de los Notarios de su territorio, comprendiendo diversas provincias, recabando los resúmenes estadísticos que recibían mensualmente de cada Notario a través de los índices que se confeccionaban manualmente por el personal de la notaría.

Los citados Colegios eran los que enumeramos a continuación reseñando las provincias que tenían a su cargo:

Albacete (Albacete, Ciudad Real, Cuenca y Murcia).

Baleares (Palma).

Barcelona (Barcelona, Gerona, Lérida y Tarragona).

[10] GIMÉNEZ ARNAU, E. (1944). *Introducción al Derecho Notarial*, pp. 169-174.

[11] *El Notario de El Siglo XXI. Revista on line del Colegio Notarial de Madrid*, nº 41, enero-febrero de 2012. Afortunadamente en el año 2015, de los cerca de 3000 Notarios existentes en España, el 29% de los mismos son mujeres, y el 71% restante hombres, aunque en las últimas promociones los porcentajes están más próximos.

Burgos (Álava, Burgos, Logroño, Santander, Soria y Vizcaya).

Cáceres (Badajoz y Cáceres).

La Coruña (La Coruña, Lugo, Orense y Pontevedra).

Granada (Almería, Granada, Jaén y Málaga).

Las Palmas (Las Palmas y Santa Cruz de Tenerife).

Madrid (Ávila, Guadalajara, Madrid, Segovia y Toledo).

Oviedo (Oviedo).

Pamplona (Guipúzcoa y Navarra).

Sevilla (Cádiz, Córdoba, Huelva y Sevilla).

Valencia (Alicante, Castellón y Valencia).

Valladolid (León, Palencia, Salamanca, Valladolid y Zamora)

Zaragoza (Huesca, Teruel y Zaragoza).

Excede de este trabajo la estadística particular y concreta de cada provincia, extremo perfectamente posible. Hemos tratado de buscar una estadística general en el ámbito nacional y no centrarnos en los territorios de influencia de los dos bandos contendientes. Aunque sí podemos afirmar que, los territorios que especialmente vieron mermada su actividad comercial y contractual fueron los comprendidos en los Colegios de Madrid y Barcelona, existiendo otros territorios que salieron mejor parados como los pertenecientes a los Colegios de Sevilla y Burgos.

La Estadística de los años 1931 a 1936, reflejan una actividad global marcada por la esperanza en los nuevos tiempos, el temor a una conflagración atroz y constantes motines y huelgas, lo que no permitió un gran crecimiento económico en esa reciente andadura política. Se empezó con unos números que fueron decayendo año tras año. Así, si en el año 1931 se firmaron 1.017.829 instrumentos públicos, en el año 1937 dicha cifra bajó a 235.447 escrituras (más del 76% de disminución).

En este periodo la contratación inmobiliaria se mantuvo durante los dos primeros años (190.869 y 190.203 escrituras de compraventa), disminuyendo en los años siguientes, llegando al año fatídico de la guerra (1936) a la cifra de 88.639 escrituras de compraventa (–46%).

Es interesante descubrir que con el nacimiento de la República se autorizaron cerca de medio millón de actas de protestos de documentos de giro (letras o pagarés), lo que significaba que la gente compraba, vendía y se obligaba al pago mediante la emisión de letras de cambio y, ante el impago, se formalizaba el protesto notarial. Esta cifra no se repetiría hasta pasados muchos años (258.564 actas de protesto se autorizaron en el año 1945), lo que trasluce una clara contracción en las transacciones comerciales existentes.

Paralelamente a este dato, podemos destacar la carencia de crédito a las empresas y familias, pasando de las 32.008 escrituras de préstamo del año 1931 a poco más de 3.000 escrituras en los años 1937 y 1938.

En cuanto a la estadística relativa a otros tipos de documentos notariales manifiestan una similar disminución.[12]

Después de más de setenta años, la lectura que podemos hacer de la estadística contractual notarial de los años de la Guerra (1936 a 1939), como es lógico suponer, es tremendamente negativa. Si en el año 1936 se firmaron 88.639 escrituras de compraventa y 14.350 de préstamo, en el año siguiente 1937, donde los datos fueron mucho peores, se autorizaron únicamente 31.346 y 3.091 escrituras de compraventa y préstamo, respectivamente. En este año la guerra se cebó, como decíamos, con Barcelona, Madrid y Valencia.

También, es palpable que la España de los años treinta era principalmente rural, pues la estadística marca poca creación de empresas y actividad mercantil. Así en el año 1931 sólo se crearon o intervinieron 2.665 escrituras de constitución de empresas o de disolución, suma que tuvo poco crecimiento en los años siguientes.

En la primera etapa de la dictadura, la Estadística contractual reflejaba un leve y continuo crecimiento en las escrituras autorizadas por los Notarios, donde pasada la contienda bélica, se abrieron nuevos horizontes para los ganadores que se tradujo, poco a poco, en volver a una actividad casi normal.

Es innegable que, pese a los cambios de sistema político, de la guerra y posguerra, y de la dictadura, la gente común que va a las Notarías hasta en los peores momentos, acude a hacer su testamento (95.499 en 1931, 36.659 en 1937 y 116.644 en 1945), o a firmar capitulaciones matrimoniales o poderes, lo que evidencia que la gente contrae matrimonio, se emancipa, se endeuda, compra y vende inmuebles, como si lo que sucediese a su alrededor no le afectase en modo alguno. Posiblemente sea inherentemente al ser humano, un espíritu de supervivencia y olvido del pasado trágico.

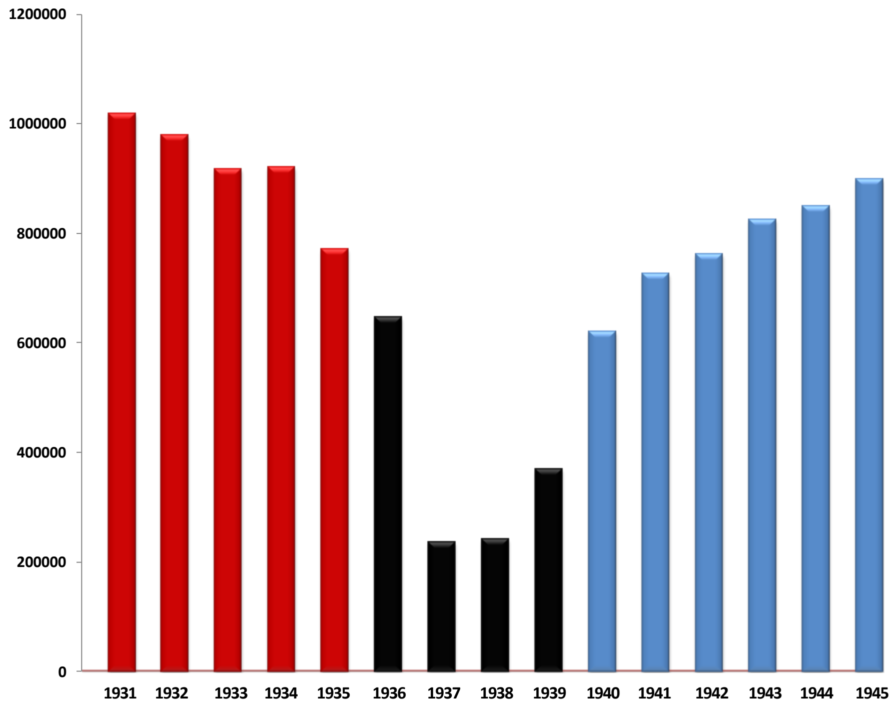
En aquellos años treinta, la mayoría de la población no podía acceder a la propiedad, salvo las clases medias y altas, muy reducidas en nuestro país. La contratación en las zonas rurales se hacía verbalmente, estrechando la mano o documentada en simples contratos privados que no accedían al Registro de la Propiedad. Hubo que esperar a los años sesenta con el boom inmobiliario para ver un crecimiento espectacular en la adquisición de inmuebles por parte de sectores humildes de la población.

Como podía esperarse, una vez terminada la guerra se intensificaron las escrituras de herencias, pasando de realizarse 23.789 escrituras particionales de herencia en el

[12] Los anuarios de los años 1936 y 1937, algunos de los datos de ciertas Notarías de Teruel y Huesca no se aportaron. Como dice el anuario de estos años “A consecuencia de las anormales circunstancias no se han recibido los datos referentes a estas Notarías”. Por su parte, en el año 1938 no se reflejaron los datos del Colegio de Baleares.

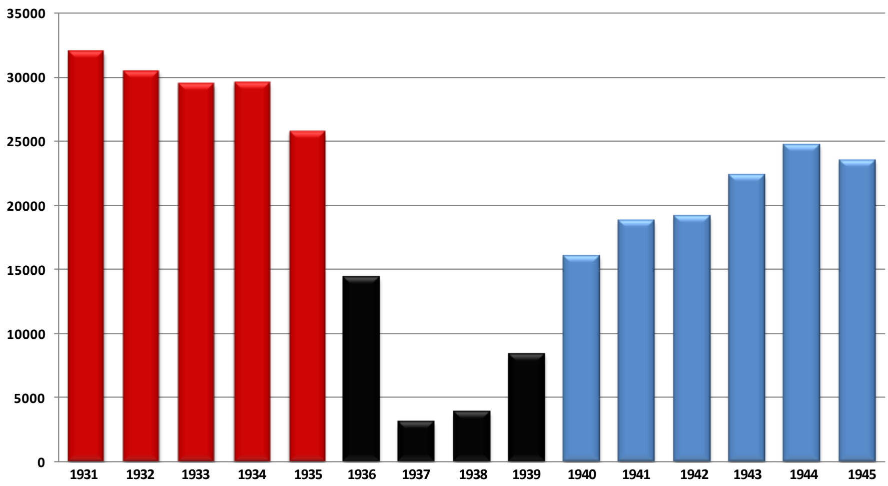
año 1936 a 36.702 en el año 1940 (+35%), lo que indica las graves secuelas y fallecimientos derivados de la guerra.

A continuación, queremos realizar unos gráficos que ponen de relieve la estadística notarial en algunos aspectos puntuales.



Número de escrituras públicas autorizadas de 1931 a 1945

Es fácilmente verificable los años negros de la guerra, donde la intervención notarial en todos los territorios y en todos los diferentes tipos de documentos sufrió una merma extraordinaria, evidenciando igualmente, que los primeros años de la dictadura en cuanto a los números totales tendrían que esperar muchos años hasta igualarse a los primeros años de la II República, que como hemos manifestado estuvieron marcados por gran desorden social y político.

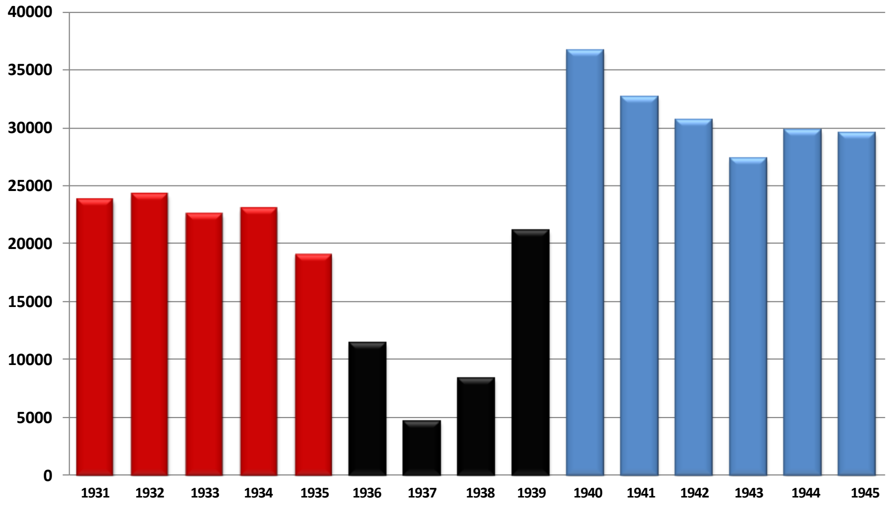


Número de escrituras de préstamos y reconocimiento de deudas (1931-1945)

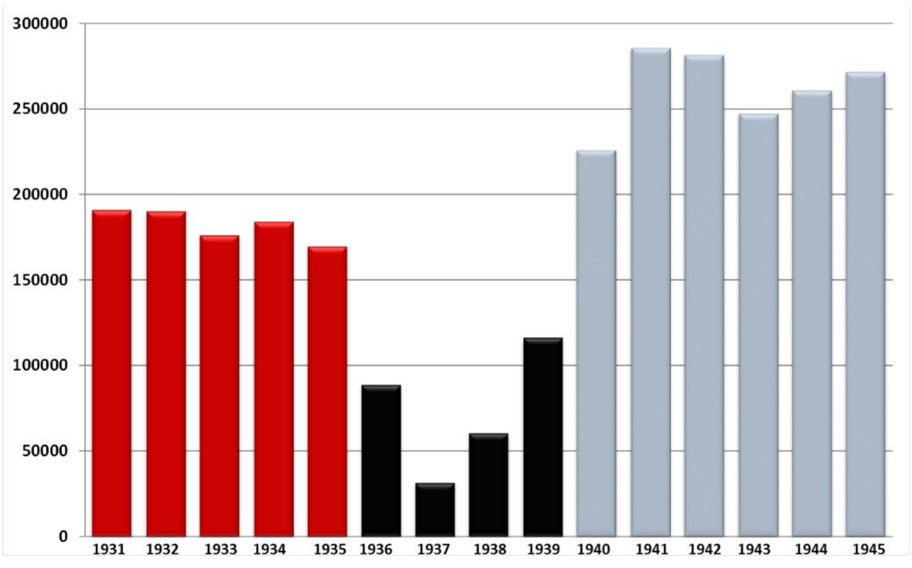
Igualmente, el gráfico precedente es significativo y llamativo. En el citado periodo el acceso al crédito sufrió una disminución importantísima, llegando en los años 1937 y 1938 (3.091 y 3.873 escrituras de préstamos, respectivamente).

Se puede apreciar que el peor año de la República fue mejor que los primeros seis años de la dictadura franquista, lo que demuestra, la gran dificultad de la sociedad para emprender nuevas actividades al contar con poco nivel de crédito externo.

Como era lógico suponer, tras una conflagración bélica, las bajas en vidas humanas resultan evidentes. La estadística notarial que figura más abajo indica claramente que en la posguerra la formalización de escrituras de herencia experimentó un notorio crecimiento, existiendo muchas más escrituras de herencia que en cualquier año de la República, manteniéndose en niveles muy superiores a los conocidos anteriormente.



Número de manifestaciones y particiones de herencias (1931-1945)



Número de contratos en general (1931-1945)

En este apartado, tenemos una foto fija muy relevante. Durante los años de la República hubo una regular y constante estadística respecto a las compraventas y contratos autorizados en las Notarías españolas. No existe un gran crecimiento, como esperando a que se despejaran las dudas sobre la implantación de dicho sistema político.

Naturalmente, durante los cuatro años de la República, sobre todo en 1937, la caída fue importantísima (–31.346 escrituras).

Por el contrario, durante los primeros años del régimen franquista se experimentó desde 1940, un notable crecimiento que se mantuvo por encima de todo el periodo republicano.

5. CONCLUSIONES

La Estadística notarial española tiene un campo propio y exclusivo de toda la actividad contractual que, la historia y los estudiosos de la estadística deben reconocer y apreciar.

En los Anuarios que edita la Dirección General de los Registros y del Notariado desde el año 1905, se puede verificar, pormenorizadamente, la intervención de los Notarios de cada rincón de nuestro país en el otorgamiento de todo tipo de escrituras públicas, desde testamentos a compraventas.

Podemos afirmar, con gran orgullo, que el padre de la Estadística contractual notarial fue Gonzalo de las Casas, que allá por el año 1877, publicó una obra titulada "Guía Estadística", donde por primera vez, dibujó cómo y por qué debía realizarse una estadística de toda la actuación notarial, marcando el rumbo a seguir para los futuros notarios. Habría que esperar un cuarto de siglo para que se empezara a recoger datos estadísticos de la intervención notarial.

Hemos realizado un trabajo de investigación de quince años (1936-1945), con miles de datos extraídos de los citados Anuarios, que contienen la actividad de los respectivos Colegios Notariales existentes en dicho periodo. La elección de dichos años, es para mostrar al lector las variables que un país experimenta en su estadística contractual en tiempos convulsos, como fue nuestra guerra civil.

Por último, este trabajo lo he realizado en homenaje al Notariado, una profesión histórica, comprometida con la sociedad, al servicio de la paz, la seguridad jurídica y la fe pública, como preconiza el lema notarial *"Nihil Prius Fide"*.

BIBLIOGRAFÍA

GARCIA COLLANTES, J.M. "Vuestros compañeros de viaje". Escritura Pública. Nº 94. Julio-agosto de 2015, p. 7.

GARCÍA DE CORTÁZAR, F., y MARTÍN DE LA GUARDIA, R. (2012). *Comparece: España*. Madrid: Espasa, p. 266.

GIMÉNEZ ARNAU, E. (1944). *Introducción al Derecho Notarial*, pp. 169-174.

GONZALO DE LAS CASAS, J. (1877). *Guía Estadística del Notariado Español*. Madrid: Gaceta del Notariado.

NAGORE YÁRNOZ, J.J. (1997). *Historia del Iltre. Colegio Notarial de Pamplona*. Pamplona.

OTERO Y VALENTÍN, J. (1933). *Sistema de la función notarial*. Barcelona: Artes Gráficas Igualada.

PÉREZ SANZ, A. "José Luis Díez Pastor". El Notario de El Siglo XXI, núm. 37, mayo-junio 2001.

CAPÍTULO 9

JUAN CARAMUEL (1606-1682): UN MATEMÁTICO DEL SIGLO XVII, CON PROYECCIÓN INTERNACIONAL

MIGUEL ÁNGEL GÓMEZ VILLEGAS

Presidente de la Asociación de la Historia
de la Estadística y de la Probabilidad de España
Instituto de Matemática Interdisciplinar

1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo se incluye un breve resumen de la vida del fraile cisterciense Juan Caramuel Lobkowitz, para pasar después a comentar sus contribuciones a la matemática y especialmente al campo de la probabilidad y de la estadística apoyado en los trabajos de varios autores. Caramuel es uno de los contraejemplos a lo que se ha dicho, desgraciadamente por gente de alto nivel científico español, respecto a que los españoles no hemos contribuido apenas al campo de las ciencias. Cuando por su profesión o los medios económicos familiares han podido romper su aislamiento, han alcanzado un nivel científico y realizado una investigación intercambiable con la de las máximas figuras de su época. Caramuel es uno de estos ejemplos. Se incluye un comentario biográfico, se comentan algunos artículos sobre él y se termina con unos comentarios bibliográficos.

Figure 1
Retrato de Juan Caramuel Lobkowitz

2. COMENTARIOS BIOGRÁFICOS

Nació en Madrid el 23 de mayo de 1606 y murió en Vigevano, en la Lombardía cerca de Milán, el 8 de setiembre de 1682. Estudió humanidades y filosofía en la universidad de Alcalá de Henares, e ingresó en la orden del císter en el Monasterio de la Espina —cerca de Medina de Rioseco en Valladolid— se formó en teología en el Monasterio de Santa María del Destierro (Salamanca) fue profesor en los colegios del císter en Alcalá y Palazuelos (Valladolid), viajó a Portugal y a Bélgica y se doctoró en teología en la universidad de Lovaina.

En cuanto a su carrera religiosa fue abad de Melrose en Escocia y de los benedictinos en Viena, vicario del arzobispo de Praga y del císter en Inglaterra. Obispo coadjutor en Maguncia, se trasladó a Roma, donde obtuvo el favor del papa Alejandro VII, de quien recibió el nombramiento de obispo de Satriano y Campagna, y posteriormente de Vigevano, próximo a Milán, donde acabó sus días. Era un hombre del renacimiento, con una gran curiosidad, autor de numerosas obras, fue llamado el Leibniz español, y se le atribuyen doscientos setenta y dos títulos, de ellos sesenta impresos.

Los campos a los que se dedicó Caramuel son de lo más diverso, escribió sobre literatura, teatro, poesía, pedagogía, criptografía, filosofía, historia, política, música, pintura, escultura, arquitectura, matemáticas, física y astronomía. Zamenhof, el creador del esperanto, lo cita entre los precursores de la idea de crear una lengua universal. Era un gran conocedor de las lenguas hebrea y árabe, lo que le permitió escribir una refutación del Corán, también es autor de una gramática del chino.

3. COMENTARIOS DE ARTÍCULOS PUBLICADOS SOBRE CARAMUEL

El primer comentario que quiero recoger es el contenido en el libro de Todhunter (1865), este comentario está referido al estudio de la combinatoria y al Cálculo de Probabilidades, que han sido las partes de la obra de Caramuel que más han atraído a la crítica no española, así Todhunter (1865) en la pág. 44, se refiere a la combinatoria diciendo que constituye una exposición moderna de la teoría y que recoge correctamente las variaciones, las combinaciones y las permutaciones, así como las mismas con repetición.

Respecto al Cálculo de Probabilidades, al que Caramuel llama "Kybeia", palabra griega que significa juegos de dados, dice Todhunter (1865) que es el segundo tratado que se publica en la historia, despues del de Huygens *De Ratiociniis in Ludo Aleae (1656) (Del Razonamiento en los Juegos de Azar)*, sobre Cálculo de Probabilidades.

Todhunter (1865) en su capítulo VI recoge:

> *Un jesuita llamado Juan Caramuel publicó en 1670 bajo el título Mathesis Biceps dos volúmenes de un libro de matemáticas; al comienzo del mismo están incluidos los trabajos del autor y dice que el libro contendrá cuatro volúmenes.*
>
> *Existe una sección llamada Combinatoria que ocupa desde la página 921 hasta la 1036 y parte de ella está dedicada a nuestro tema [el Cálculo de Probabilidades].*

La opinión de Todhunter del trabajo de Caramuel es bastante positiva, sin embargo, un poco más adelante, en el mismo texto, incluye un comentario, esta vez bastante negativo, sobre el trabajo de Caramuel dado por Nicolas Bernoulli, en el sentido de que no añade nada a la tesis doctoral que Nicolás ha realizado. En mi opinión, el trabajo de Caramuel es el segundo después del de Huygens, lo que le da gran importancia, y creo que los inconvenientes que señala Nicolás van en la línea de defender los resultados que están contenidos en su tesis. Problemas de este tipo se repiten sobre todo dentro de la familia Bernoulli. Todhunter (1865) en su párrafo 76 dice:

> *Nicolás Bernoulli ha exagerado los errores del jesuita. Caramuel [dice Todhunter] aborda los siguientes aspectos correctamente: el cálculo de las probabilidades de los resultados posibles al tirar dos dados; el caso más simple del Problema de los Puntos con dos jugadores; la probabilidad de obtener al menos un uno al tirar uno dos o tres dados; resuelve el juego Passe-Dix.*
>
> *Se equivoca al resolver el Problema de los Puntos con tres jugadores, que él aborda en dos casos particulares, y también se equivoca en otros dos problemas, uno es el problema número catorce de Huygens y el otro es uno análogo.*

La manera correcta de resolverlo puede verse en Todhunter (1865). Es curioso el que tanto los Bernoulli como Todhunter digan que Caramuel es jesuita y no cisterciense, que es lo que en realidad era. En aquella época los jesuitas eran la orden religiosa más avanzada, Caramuel estaba en línea con los aspectos científicamente más novedosos y quizá sea esto lo que explica la confusión; así rechaza la escolástica, se rebela contra la autoridad de Aristóteles y adopta el mecanicismo cartesiano, en teología fue molinista[1] y en moral probabilista, anticipando la noción de probabilidad que posteriormente va a ser recogida por Pascal en su famoso epistolario con Fermat. Quizá por esto, sin afinar demasiado tanto Todhunter como Nicolás Bernoulli le asocian con la orden más progresista de los jesuitas y no con el císter.

La segunda publicación que voy a comentar es la de Fernández Diéguez (1919), un catedrático de matemáticas de instituto de A Coruña que reivindica la figura de Caramuel en la misma línea que el autor de este artículo, y que recoge algunos comentarios sobre la vida del mismo. En concreto comenta que, siendo ya profesor en la universidad de Lovaina, contribuyó a la defensa de las murallas de la ciudad que fue cercada por un poderoso ejército protestante de holandeses y franceses. Lo mismo hizo en Praga cuando ésta fue cercada por los suecos, en 1648, lo que le valió el reconocimiento del rey de España Fernando III. En el artículo de Diéguez está recogida la cita que de Caramuel hacían sus contemporáneos:

> *Si Dios dejase perecer las ciencias todas en todas las universidades del mundo, como Caramuel se conservase, él solo se bastaría para restablecerlas en el ser que hoy tienen.*

El tercer artículo que consideraré se debe a Garma (1980) y es un resumen de su tesis doctoral. En él señala que las contribuciones de Caramuel son: al estudio de los sistemas de numeración, a la trisección del ángulo, al descubrimiento del cologaritmo, a la combinatoria y al Cálculo de Probabilidades. Con referencia a los sistemas de numeración, Caramuel hace la primera exposición completa de los sistemas de numeración y en ello estoy de acuerdo con Garma. Podemos afirmar, sin ninguna duda, que Caramuel comprende y sitúa en su contexto el significado de los logaritmos. Un estudio más detallado de su cálculo de logaritmos y de los sistemas de numeración puede verse en el trabajo de Garma (1978).

El segundo tema matemático estudiado por Caramuel es el de la trisección del ángulo, y es el único problema geométrico que abordó, aquí la contribución es comentada por Peñalver y Bachiller (1930) en el discurso inaugural de comienzo del curso en la universidad de Sevilla, donde curiosamente se señala que Caramuel no advirtió que la solución que había dado era aproximada, lo que parece un comentario al menos extraño.

El siguiente problema tratado por Caramuel es el de los cologaritmos, aquí también el comentario está hecho por españoles, Fernández Diéguez (1919) quién dice algo sorprendente: que después de hacer un estudio preciso no obtiene las conclusiones debidas.

[1] Seguidor de la teoría del jesuita español Juan Molina, que explica la aparente contradicción entre el conocimiento que Dios tiene de lo que cada uno vamos a hacer con el *libre albedrío del hombre.*

El siguiente estudio utilizado ha sido un artículo de Martín-Pliego y Santos del Cerro (2002) en el que se recogen un comentario de las contribuciones de Caramuel al Cálculo de Probabilidades. En este trabajo se hace justicia al papel desarrollado por Caramuel y se estudia el *Problema de los puntos* explicando con detalle lo que hace bien y la parte donde éste se equivoca; básicamente Caramuel empieza bien la resolución del caso particular de repartirse 36 monedas entre dos jugadores que han apostado a sacar 6 y 7 como suma con dos dados y que van tirando sucesivamente los dos, dice que ha de hacerse proporcional a lo que le falta a cada uno para obtener 6 y 7, pero curiosamente divide el resto del fondo por dos en lugar de continuar con el razonamiento que llevaba, que era el correcto; ha de tenerse en cuenta que en este tiempo la probabilidad no existe.

Hald (1990) habla también sobre Caramuel en la página 184 de su conocido libro, donde recoge entre las contribuciones a la probabilidad publicadas entre 1657 y 1708 la figura de Caramuel, pero lo hace a través de Todhunter, en concreto dice que en 1670 publicó un libro de matemáticas *Mathesis Biceps* que contiene una sección sobre combinatoria en la que recoge "resultados bien conocidos", una reedición del trabajo de Huygens, atribuido al astrónomo danés Longomontano, y algunos intentos de Caramuel para resolver problemas elementales en juegos de azar que sin embargo no van más allá de los resultados del tratado de Huygens.

4. CONTRIBUCIONES DE CARAMUEL EN LA KYBEIA

Se dispone de una traducción al castellano hecha por Martín Pliego y Santos del Cerro de la Kybeia, en la que se puede leer y colocar en su justo lugar el trabajo en probabilidades de Caramuel respecto a la combinatoria y la Kybeia, que constituye la parte XXIII y XXIV de la "Mathesis Biceps", por lo que es éste el texto que he utilizado para realizar los comentarios siguientes. Caramuel comienza definiendo lo que él entiende por Kybeia, "que es el género de la combinatoria que trata ordenadamente sobre la suerte y los juegos de azar". Determina cuánto puede exponerse y cuánto cobrar en los juegos que dependen de la suerte para que exista la necesaria equidad, y ésto se prueba con sólidos argumentos.

A continuación, incluye el párrafo número XLIX en el que habla del inventor de los dados —Palamédes, hijo de Nauplio, durante el sitio de Troya, para el entretenimiento de los soldados— y en este mismo párrafo número XLIX dice Caramuel:

> *En los juegos de suerte, que dependen solo de la fortuna, se debe observar en todo momento la justicia*

Explica también que la justicia es lo que nosotros llamamos ahora *juego limpio*, y curiosamente dice que para establecer la justicia se necesita un teólogo y para establecerla en una competición se necesita recurrir a la matemática.

IOANNIS CARAMVELIS

MATHESIS BICEPS.

VETVS, ET NOVA.

I.	ARITHMETICA.	XXI.	LOGARITHMICA FLVENS.
II.	[illegible] ALGEBRA.	XXII.	LOGARITHMICA REFLVENS.
III.	GEOMETRIA GENERALIS.	XXIII.	COMBINATORIA.
IV.	COSMOGRAPHIA.	XXIV.	KYBEIA: DE LVDIS.
V.	GEODÆSIA.	XXV.	ARITHMOMANTICA.
VI.	GEOGRAPHIA.	XXVI.	TRIGONOMETR. GENERALIS.
VII.	CENTROSCOPIA.	XXVII.	TRIGONOMETR. RECVRRENS.
VIII.	OROMETRIA.	XXVIII.	TRIGONOM. ASTRONOMICA.
IX.	HYDROGRAPHIA.	XXIX.	ÆTHEREVS RECTANGVLVS.
X.	HISTIODROMICA.	XXX.	ΔΙΑΒΗΤΗϹ. CIRCINVS.
XI.	HYPOTHALATICA.	XXXI.	ARCHITECTVRA MILITARIS.
XII.	NECTICA.	XXXII.	MVSICA.
XIII.	NAVTICA SVBLVNARIS.	XXXIII.	METALLARIA.
XIV.	NAVTICA ÆTHEREA.	XXXIV.	PEDARSICA.
XV.	POTAMOGRAPHIA.	XXXV.	STATICA.
XVI.	HYDRAVLICA.	XXXVI.	HYDROSTATICA.
XVII.	AEROGRAPHIA.	XXXVII.	METEOROLOGIA.
XVIII.	ANEMOMETRIA.	XXXVIII.	SPHOERICÆ } Planetarum Hypotheses.
XIX.	PYETICA.	XXXIX.	OSCILLATORIÆ } Planetarum Hypotheses.
XX.	SCIOGRAPHIA.	XL.	RECTILINEÆ } Planetarum Hypotheses.

IN OMNIBVS, ET SINGVLIS

Veterum, & Recentiorum Placita examinantur; interdum corriguntur, semper dilucidantur: & pleraque omnia Mathemata reducuntur speculativè & practicè ad facillimos, & expeditissimos Canones.

ACCEDENT ALII TOMI, VIDELICET:

ARCHITECTVRA RECTA, symmetrias à Veteribus traditas corrigens & exornans.

ARCHITECTVRA OBLIQVA, de quâ nemo scripsit hucusque. Est Ars sûme necessaria, ut errores à Iunioribus passim admissi cognoscâtur.

ARCHITECTVRA MILITARIS, Canones Artificum ingenio & captui attemperans, reducensque ad exquisitissimam facilitatem.

MVSICA, Vocalis, & Organica, rejectis Guidonis Aretini Mutationibus per viam liberam & expeditam Philomusos conducens.

ASTRONOMIA PHYSICA, multos Tractatus & Dissertationes de motibus Astrorum continens.

CAMPANIAE,

In Officinâ Episcopali Anno M.DC.LXX. *SVPERIORVM PERMISSV.*
Prostant Lugduni apud Laurentium Anisson.

Figura 2
Índice de la Mathesis Biceps de Caramuel.

El texto está dividido en cuatro artículos:

> Artículo I. De los dados, párrafo número L al LVI donde describe varios juegos de dados que son jugados en España.
>
> Artículo II. De aquellos que abandonan el juego ya comenzado, párrafo número LVII al LXIX.
>
> Artículo III. Acerca de quién apuesta que, en la primera, o en la segunda, o en la tercera, etc. va a sacar determinado número, párrafo número LXX al LXXIII.
>
> Artículo IV. Del juego llamado Meta Seca, más allá de diez, al que en español se le da el nombre de Pasa-Diez, párrafo número LXXIV al LXXVIII.

El texto termina con una nota, el párrafo número LXXVIII, XIV Proposiciones contenidas en el libro de Huygens y añade 5 proposiciones más y 5 problemas de los cuales el segundo y el tercero no tienen solución, pero a todos los demás puede darse ésta mediante lo expuesto en el Artículo III.

Con referencia a los resultados que conoce recogidos en su Kybeia debemos decir que sabe la manera de obtener distintos valores como suma de dos dados y dice que “7 es el *mejor* número”, lo hace en el párrafo LII, hoy diríamos el más probable para la suma.

También conoce con total precisión, la noción de “juego justo”, dice en el párrafo LIII, si en un juego puedes perder aquello cuanto puedas ganar el juego es equitativo y justo; es desigual y malo,

> *si puedes ganar más de lo que puedes perder y al contrario”,*

Sabe la manera en que deben repartirse las apuestas cuando el juego no puede terminarse, proporcional al número de partidas que a cada jugador le faltan para llegar al final, lo hace en el párrafo LIX, pero se equivoca al obtenerlo.

Obtiene el valor esperado de un juego, en la Proposición I, aunque se equivoca al enunciarla como

> *tener tres esperanzas iguales de obtener a o b me vale* $\frac{a+b}{2}$

Cuando debería haber enunciado “tener dos esperanzas iguales de obtener a o b me vale $\frac{a+b}{2}$ ”

5. COMENTARIOS BIBLIOGRÁFICOS Y CONCLUSIÓN

Terminamos este estudio con unos comentarios bibliográficos para poner de manifiesto las contribuciones del autor, a la historia del cálculo de probabilidades y de la estadística y algunos escritos importantes. El *Ensayo de Bayes (1764)* fue traducido al castellano por primera vez por Girón et al. (2001), entre quienes estaba el autor de este artículo. En Gómez Villegas (1994) puede verse un estudio sobre el problema de la probabilidad inversa. El desarrollo de los métodos frecuentistas y bayesianos puede verse en el libro, del que se han hecho ya tres reimpresiones, de Gómez Villegas (2005, 2011, 2014). En Hald (1990) y Hald (1998) se puede consultar un estudio histórico muy interesante que abarca desde antes del 1750 y desde 1750 hasta 1930 respectivamente. En castellano puede consultarse De Mora (1989) que está siendo actualizado por ella misma y el autor de este artículo. Un estudio de las contribuciones de Fisher a la estadística puede verse en Girón y Gómez Villegas (1998). Un interesante estudio histórico sobre probabilidad y estadística puede consultarse en E. Pearson (1978). En Stigler (1986) se puede ver un estudio actual de la evolución de las ideas de la probabilidad y de la estadística, llevado a cabo por un historiador y estadístico con un fino sentido del humor.

Por último, esperamos que este artículo contribuya a situar, en su sitio correcto las contribuciones de Caramuel al cálculo de probabilidades.

BIBLIOGRAFÍA

FERNÁNDEZ DIÉGUEZ, D. (1919) Un matemático español del siglo XVIII. *Revista Matemática Hispano-Americana*, **3**, 121-213.

GARMA S. (1978) Las aportaciones de Juan Caramuel al nacimiento de la matemática moderna, *Tesis doctoral.* Valencia.

GARMA, S. (1980) Las aportaciones de Juan Caramuel (1606-1682) al nacimiento de la matemática moderna. *Anuario de Historia Contemporanea*, **19**, 4-5, 77-86.

GÓMEZ VILLEGAS, M. A. (2005, 2011, 2014) *Inferencia Estadística.* Madrid: Díaz de Santos.

HALD, A. (1990) *A History of Mathematical Statistics before 1750,* New York: John Wiley and Sons.

HALD, A. (1998) *A History of Mathematical Statistics from 1750 to 1930,* New York: John Wiley and Sons.

MARTÍN-PLIEGO, F. J. y SANTOS DEL CERRO, J. (2002) Juan Caramuel y el Cálculo de Probabilidades, *Estadística Española*, **44**, 150, 161-173.

DE MORA, M. (1989) *Los Inicios de la Teoría de la Probabilidad siglos XVI y XVII,* Vizcaya: Univ. del País Vasco.

PEARSON, E. (1978) *The History of Statistics in the XVII and XVIII: Karl Pearson,* New York: MacMillan.

PEÑALVER Y BACHILLER, P. (1930) Discurso inaugural del curso 1930-31 en la universidad de Sevilla, Sevilla.

STIGLER, S. M. (1986) *The History of the Statistics: the measure of Uncertainty before 1900,* Cambridge: Univ. de Harvard.

TODHUNTER, I. (1865) *A History of the Mathematical Theory of Probability from the Time the Pascal to that of Laplace,* Cambridge: MacMillan and Co.

CAPÍTULO 10

NUEVOS RETOS DE LA ESTADÍSTICA: BIG DATA, EL ANÁLISIS AUTOMÁTICO DE DATOS

JAVIER GARCÍA NIEVA
CRISTINA SÁNCHEZ FIGUEROA
Universidad Nacional de Educación a Distancia

1. INTRODUCCIÓN

Nos encontramos inmersos en la Era de la Información donde los ordenadores se encuentran presentes en todos los ámbitos de nuestras vidas, desde el laboral al personal, los sistemas informáticos se encuentran ahí, ayudándonos a tomar decisiones o realizando tareas automatizas a velocidades de vértigo. Pero el exceso de mecanización también trae consigo algunos problemas. Uno de los más complejos es el que deriva del exceso de datos.

El exceso de datos, que no de información, el ruido, es un enemigo invisible en esta Era de la Información. Cuando realizamos una simple búsqueda en un buscador cualquiera en Internet, podemos obtener millones de resultados que deberemos filtrar de una u otra manera hasta llegar al resultado deseado. En ocasiones la dificultad estriba en saber si ese resultado es siquiera correcto o simplemente está posicionado ahí porque el algoritmo de búsqueda así lo haya decidido.

Es dentro de esta aparente complejidad donde la estadística se ha posicionado como una herramienta básica para ayudarnos a manejar ingentes cantidades de datos y extraer la información relevante. Desde los primeros paquetes estadísticos aparecidos el siglo pasado hasta el moderno paradigma del Big Data, la estadística ha estado siempre ahí presente.

2. CONTEXTUALIZACIÓN

Vivimos inmersos en un mundo en el que los datos fluyen de múltiples dispositivos y crecen de manera exponencial, lo que se conoce como era de la información. Las empresas con más éxito en nuestros días son aquellas que han logrado analizar todo este flujo de datos generando la tecnología y las herramientas estadísticas necesarias para desarrollar su propio modelo de negocio con una ventaja competitiva respecto al resto. Los datos siempre han estado ahí pero su diferente tipo y las nuevas formas de aplicación se han visto condicionadas por la tecnología y la mejora en el software estadístico. Hoy en vez de hablar en términos de secciones censales, hablamos en términos de hogares individuales o, mejor aún, los miembros de la familia.

Si hacemos un repaso hace setenta años nos encontramos con los primeros intentos de cuantificar la tasa de crecimiento del volumen de datos o lo que popularmente se conoce como la “explosión de la información” (un término usado por primera vez en 1941, según el Diccionario de Inglés de Oxford). En esta misma línea, el término Big Data es tan genérico que la búsqueda de su origen está condicionado a un significado que ha evolucionado con el tiempo. La aplicación del Big Data, tal como la conocemos hoy, se considera vinculada a nuestros días, pero su origen podemos decir que viene de hace más tiempo. Big Data ha crecido en importancia en los últimos años debido a la difusión de su aplicación, a través de áreas que van desde la predicción para el análisis de las tendencias de negocios, lucha contra la delincuencia y la prevención de epidemias, etc.

Tras consultar referencias bibliográficas sobre el origen de Big Data existen ambigüedades sobre a qué autor atribuir el término Big data. Erik Larson 1989 escribió un artículo para la revista de Harper’s en el que hace referencia a este término, aunque con un significado muy diferente al que hoy tenemos. El artículo analiza la industria del marketing directo y su práctica de combinar los datos para analizar el perfil de consumo, incluye esta reflexión: “Los guardianes de los grandes datos dicen que lo hacen para el beneficio del consumidor. Pero los datos tienen una manera de ser utilizados para fines distintos de la intención original”. (Larson, Erik (1989), “What Sort of Car-rt-sort Am I,” Harper’s Magazine, July, pp. 64-69.). El autor más reconocido que utiliza por primera vez la expresión Big Data, es a John Mashey, jefe científico de Silicon Graphics en la década de 1990. Aunque no existen artículos académicos para apoyar esta contribución si lo avalan las charlas a grupos pequeños en la década de 1990 para explicar el concepto. Al economista Francis X. Diebold sí se le pueden atribuir los primeros artículos académicos relacionados con el término Big Data y su aplicación. Su investigación “Data’ Dynamic Factor Models for Macroeconomic Measurement and Forecasting” publicada en 2004 es un claro ejemplo de ello.

Para definir de un modo unívoco en qué consiste y qué retos conlleva Doug Laney en 2001 definió las 3 V para Big Data: “Volumen, Velocity, Variety” (Volumen, Velocidad, Variedad). Las conocidas como “3VS” se han convertido en las tres dimensiones que definen Big Data pero que con el paso de los años han ido evolucionando. En 2011 ha llegado a identificar doce dimensiones de la gestión de datos. Lo que empezó siendo analizar una serie de datos, que tenían cabida en una hoja de cálculo, ha pasado convertirse en gigantescas cantidades de datos que están almacenados en ‘la nube’. Esta nube (Cloud Computing) es un nuevo modelo de prestación de servicios, de información y aplicaciones a través de Internet donde la mayoría del software se ejecuta en la propia Red.

En esta línea, en 2007, John F. Gantz, David Reinsel y otros investigadores de IDC elaboran el informe “El Universo Digital Expansión: Un pronóstico del crecimiento de la información en el mundo en 2010”. Es el primer estudio para estimar y pronosticar la cantidad de datos digitales creados y usados cada año. El informe pone de manifiesto que hay una gran brecha existente entre ambos. En años posteriores, 2010 y 2012, se elaboraron dos versiones del mismo estudio. Para el año 2012 únicamente el 23% de los datos podrían ser útiles si estos estuvieran bien etiquetados y analizados.

Estas no son las únicas referencias que tenemos de Big Data y de la creciente cantidad de datos digitales. Son numerosos los estudios realizados durante estos años considerando que las empresas están encontrando son nuevas fuentes de datos, nuevas formas de analizar los datos y nuevas formas de aplicar el análisis a la empresa con el objetivo prioritario de aumentar los ingresos en las empresas.

“Big Data es un término que describe un gran volumen de datos, velocidad, datos complejos y variables que requieren técnicas y tecnologías avanzadas para permitir la captura, almacenamiento, distribución, gestión y análisis de la información”. (Comisión Federal de Big Data de TechAmerica Fundación 2012)

3. UNA BREVE HISTORIA DEL SOFTWARE ESTADÍSTICO

Desde principios de los años 80 del siglo pasado, con la llegada de los ordenadores personales o la aparición de los primeros sistemas operativos orientados al usuario doméstico, la industria informática empezó a ofrecer herramientas que realizaban las funciones estadísticas más comunes a unas velocidades increíbles y que además nos permitían visualizar los resultados.

Todo ello supuso un avance increíble en prácticamente todas las ramas del conocimiento actual: desde estudios médicos a censos demográficos, pasando por las finanzas, el marketing o los transportes. En la actualidad es indiscutible la importancia que la estadística computacional tiene en nuestras vidas.

A continuación, se presentan algunas de las herramientas estadísticas más conocidas en la actualidad, intentando diferenciar entre aquellas que proporcionan una interfaz gráfica y lenguaje de programación propio, de las que simplemente proporcionan lo segundo.

4. LOS PAQUETES ESTADÍSTICOS CLÁSICOS

4.1. Statgraphics

Statgraphics es un paquete estadístico creado en 1980 por el Dr. Neil Polhemus y que permite la ejecución y visualización de funciones estadísticas básicas y avanzadas. La versión actual del programa, Statgraphics Centurion XVII, fue lanzado en 2014. Este programa se emplea con frecuencia en metodologías de mejora de procesos de producción en cadena como el Seis Sigma (Statgraphics, 2015)**.**

4.2. Eviews

La primera versión es creada en 1994 y sustituye el MicroTSP. La versión actual de Eview es la 8 que fue lanzada en 2013. Es un paquete estadístico para sistemas operativos Windows empleado para el análisis estadístico general, pero es especialmente útil para realizar análisis econométrico, como modelos de corte transversal, datos en panel y estimación y predicción con modelos de series de tiempo. Fue desarrollado por Quantitative Micro Software (QMS). (Eviews, 2015).

4.3. Mathematica

Desarrollado en 1988 por Stephen Wolfram, Mathematica es un sistema integrado que proporciona miles de funciones estadísticas ya definidas, lo que permite la ejecución y el desarrollo de complicados algoritmos matemáticos necesarios en cualquier ámbito científico actual. Cuando se lanzó Mathematica 1.0 The New York Times publicó que "la importancia del programa no puede ser pasada por alto", y luego, Business Week colocó a Mathematica entre los 10 productos nuevos más importantes del año. (Wolfram, 2015).

4.4. Matlab

MATLAB es un software destinado en sus inicios a realizar cálculos matriciales. MATLAB fue creado a finales de 1970 por Cleve Moler. Pronto se extendió a otras universidades y encontró un gran uso dentro de la comunidad matemática aplicada. Se ha convertido en uno de los entornos de computación numérica más avanzados y empleados en la actualidad (Mathworks., 2015).

4.5. SPSS

SPSS es un programa estadístico muy usado en las ciencias sociales y las empresas de investigación de mercado dado su sencillez de interfaz en la mayoría de los análisis. Fue creado como el acrónimo de Statistical Package for the Social Sciences. Se crea con el principal objetivo de utilizar las estadísticas para convertir los datos en información de interés para la toma de decisiones. Entre 1969 y 1975 la Universidad de Chicago, por medio de su National Opinion Research Center, estuvo a cargo del desarrollo, distribución y venta del programa. A partir de 1975 corresponde a SPSS Inc. (SAS, 2015).

4.6. SAS

Es el más veterano de todos los paquetes clásicos pues fue desarrollado por la North Carolina State University entre 1966 y 1976. En la actualidad se emplea fundamentalmente en entornos de minería de datos (Business Analytics), transforma los datos en información de valor que se pueda utilizar (SAS, 2015).

5. PROGRAMACIÓN ESTADÍSTICA

5.1. R

Fue desarrollado en 1993. Su desarrollo actual es responsabilidad del R Development Core Team. R proporciona un amplio abanico de herramientas estadísticas y de gráficas. R es un lenguaje de programación empleado para computación estadística y minería de datos, y que ha ganado mucha popularidad recientemente gracias a la proliferación de campos como la Ciencia de Datos (R-Project, 2015).

5.2. Lapack

Es una biblioteca para el análisis numérico y álgebra lineal, desarrollada originalmente en lenguaje FORTRAN en el año 1992. Proporciona funciones para la resolución de ecuaciones lineales, mínimos cuadrados, descomposición en valores propios, etc. (Netlib, 2015).

5.3. Pandas

Pandas es una biblioteca de código abierto que proporciona herramientas y estructuras de datos para el análisis de datos mediante el lenguaje de programación PYTHON. Su desarrollo es relativamente moderno, 2008, pero es hoy por hoy una de las bibliotecas más empleadas en computación científica con PYTHON (Pydata, 2015).

5.4. Octave

GNU Octave es un lenguaje de programación de alto nivel empleado principalmente en computación numérica y que emplea una sintaxis parecida a Matlab, si bien Matlab proporciona una interfaz más completa además de un lenguaje de programación propio. La primera versión se liberó en 1988 y en la actualidad sigue siendo muy popular (Octave, 2015).

6. EL PROBLEMA DE LA INGENTE CANTIDAD DE DATOS A PROCESAR

Si el problema de la gran cantidad de datos que una empresa, organismo público o un individuo pueden tener almacenados en sus dispositivos informáticos es ya de por sí suficientemente grande, a eso habría que añadir el hecho de la gran mayoría de estos datos tendrán formatos diferentes, haciendo la ya de por sí complicada tarea de centralizar y gestionar esta maraña de datos, una tarea extremadamente compleja.

¿Cómo podemos dar sentido al gran volumen de información potencial? Datos estructurados, no estructurados, en tiempo real, datos de marketing, operaciones, de fuentes internas y externas, modelos predictivos e información pasada, etc.

Pensemos por ejemplo en compañías como Google, Facebook o Twitter. En la actualidad los órdenes de magnitud en el campo del procesamiento de datos han cambiado. Si bien antes se hablaba en términos de Gigabytes (10^9 bytes) almacenados por hora, hace ya tiempo que las grandes empresas sólo hablan de Terabytes (10^{12} bytes) o incluso Petabytes (10^{15} bytes).

Los sistemas clásicos de almacenamiento de datos, basados en grandes servidores ejecutando gigantescas bases de datos relacionales[1] han quedado obsoletos para determinadas tareas que requieren capacidades de almacenamiento y procesamiento de datos cientos de veces superiores.

7. EL BIG DATA

La necesidad de computar y trabajar con estos volúmenes de datos requiere un paradigma nuevo, otra manera de aproximarse a este problema, y es aquí donde aparece el Big Data.

Big Data (*Datos Grandes* sería una traducción un poco forzada) es un término empleado para describir una situación, en la que el volumen y la variedad de los datos, excede las capacidades de almacenamiento y procesamiento habituales afectando a la toma de decisiones en unos parámetros de tiempo adecuados.

El Big Data no es una única tecnología sino una combinación de nuevas y viejas técnicas que permite a las organizaciones obtener una información adecuada, de ma-

[1] Una base de datos relacional organiza los datos en tablas formadas por filas y columnas, con una clave única por cada fila. Se puede afirmar que sigue un esquema estático, rígido, y cuyo lenguaje de consulta se llama SQL y se basa a su vez en el álgebra relacional.

nera relativamente rápida, a partir de grandes volúmenes de datos dispares y sin relación aparente alguna.

A la hora de procesar estas enormes cantidades de datos, y a diferencia con los sistemas clásicos relacionales que emplean grandes servidores, se hace necesario distribuir estos datos, el problema, en bloques más pequeños y manejables, y repartirlos entre diferentes computadoras para un tratamiento paralelo de los mismos. Estos servidores ejecutarán de manera coordinada una serie de tareas sobre su bloque de datos y responderán con un resultado a un nodo o servidor central, que será el encargado de presentar la información final tras agregar todas las respuestas obtenidas.

Además de una ventaja clara en términos de almacenamiento, este modelo distribuido también proporciona ventajas en coste, puesto que se pueden emplear servidores de bajo coste, y en fiabilidad, puesto que si un nodo falla el resto se hará cargo. Cantidad sobre calidad.

7.1. Hadoop

Apache Hadoop[2] es un software de código abierto que permite la ejecución de aplicaciones intensivas de datos de manera distribuida sobre hardware económico. Se basa en las investigaciones y posteriores publicaciones de Google sobre el MapReduce y el Google File System (GFS).

Hadoop proporciona una serie de bibliotecas para el procesamiento masivo de datos distribuidos mediante lenguajes de programación habituales y está diseñado para que sea fácilmente ampliable (escalabilidad), permitiendo así despliegues que comiencen con un par de servidores y que puedan llegar fácilmente a miles o decenas de miles, todo ello sobre una plataforma que proporcione alta disponibilidad y que sea tolerante a fallos.

Componentes

Los dos principales componentes de Apache Hadoop son HDFS y MapReduce. El primero empleado para almacenamiento mientras que el segundo sería el procesamiento. Algo primordial a tener en cuenta es que tanto uno como el otro van de la mano, pues lo que pretende es poder mover la capacidad de cálculo de unos datos a otros y no al revés. Es por ello que el almacenamiento no está físicamente separado del procesamiento (Hortonworks, 2013).

[2] High-availability distributed object-oriented platform.

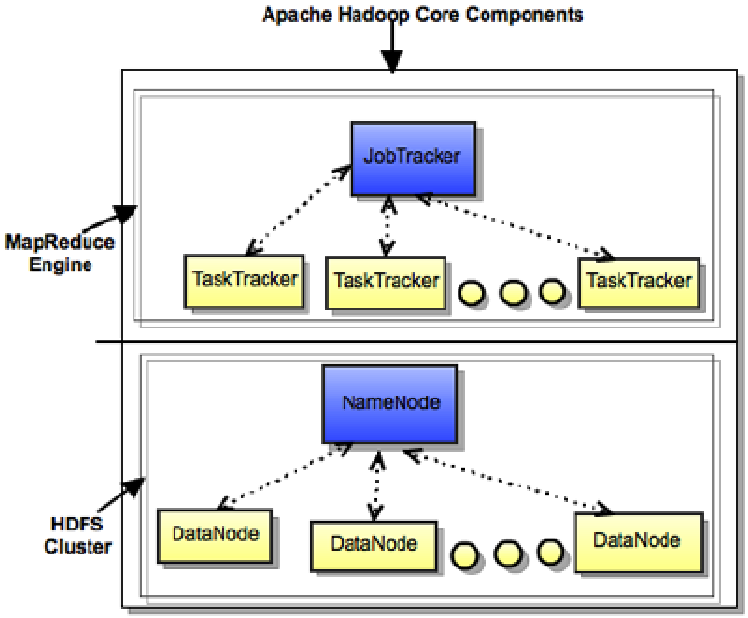


Figura 0.1
Componentes de Hadoop (Hortonworks, 2013)

HDFS

El Hadoop Distributed File System es un sistema de ficheros distribuido y escalable que proporciona el acceso a los datos almacenados en nuestro clúster. HDFS almacena y replica cada bloque de datos de manera distribuida haciendo uso de los diferentes nodos disponibles, proporcionando así un acceso fiable y rápido a los datos.

Los diferentes componentes de HDFS son el *NameNode*, que sería el nodo maestro que coordina y mantiene el sistema, los *DataNodes*, que serían los trabajadores que proporcionan el almacenamiento, y por último el *Secondary NameNode*, responsable de los chequeos periódicos para verificar la salud de nuestro clúster.

MapReduce

MapReduce sería el componente que proporciona las capacidades de procesamiento de datos distribuidos empleando el paradigma de programación MapReduce. Este paradigma de programación se basa en dos tareas: *map*, que recibe un conjunto de datos y lo convierte en otro conjunto de datos en donde los diferentes elementos se han dividido en tuplas (clave, valor), y *reduce*, que recibe la salida de map y combina todas esas tuplas para formar un conjunto menor.

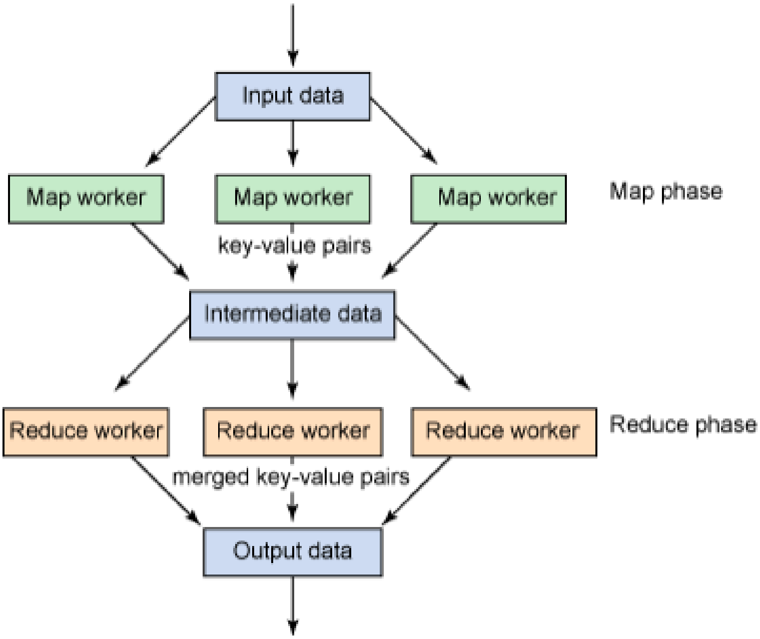


Figura 0.2
Fases en MapReduce (Gracia, 2013)

Los principales componentes de MapReduce son el *JobTracker*, que sería el nodo maestro que gestiona los trabajos y recursos en el cluster, los *TaskTrackers* que serían los nodos trabajadores y el *JobHistoryServer*, que mantendría un histórico sobre los trabajos completado.

8. ESTADÍSTICA Y BIG DATA

Supongamos que queremos calcular la media aritmética de edad de todos los ciudadanos pertenecientes a la Unión Europea, indicando además su desviación típica. Según datos de 2011, la población conjunta de los 28 países de la UE es aproximadamente 510.000.000.

Asumiendo que disponemos de los datos de edad para cada habitante en la web de Eurostat, que es la oficina estadística de la Comisión Europea, procederíamos a descargar los mismos en algún formato normalizado que se pueda interpretar fácilmente por alguno de los paquetes estadísticos habituales.

Como bien es sabido, la media aritmética y la desviación estándar se calculan respectivamente como sigue:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

donde *n* sería 510.000.000.

Es evidente que el cómputo de estos valores, aun empleando CPU de última generación, va a ser extremadamente costoso en términos computacionales, pero también lento. Y esto es sólo un ejemplo muy sencillo.

La aproximación habitual a estos problemas ha sido tradicionalmente el muestreo, donde seleccionamos un subconjunto de nuestra población lo suficientemente representativa y calcularíamos la media de este muestreo, que, con suerte, debería ser muy cercana al valor esperado para esa media respecto a la población.

Ahora bien, si tenemos todos los datos a nuestra disposición, por ejemplo, a través de los censos nacionales de todos los países de la UE, ¿por qué no utilizarlos?

Por suerte este problema tiene una no muy difícil solución en nuestros días. Y es que empleando el paradigma MapReduce a nuestra colección de datos, podemos fácilmente repartir el trabajo entre múltiples servidores para obtener un resultado mucho más rápido.

Supongamos que disponemos de M servidores, cada uno de los cuales tiene un único procesador disponible. Así el número total de trabajadores sería también M. Ahora, basta un vistazo rápido a la formula anterior de la media aritmética para darnos cuenta de cada trabajador podría calcular su media aritmética "local", sobre un subconjunto de los datos (Map). En nuestro caso, habiendo M nodos, dividiríamos los datos entre estos M nodos y calcularíamos la media local. Posteriormente los nodos, devolverían esos resultados al nodo maestro que los agregaría para presentar el resultado final (Reduce).

Imagínese que disponemos de 1000 nodos para nuestro ejemplo la media de edad europea. En ese caso cada trabajador calculará su media local sobre 5.100.000 de datos y el nodo maestro calculará una media final sobre 1000 valores de medias locales.

En general si conseguimos expresar nuestro problema como un sumatorio de datos, las posibilidades de paralelización con las tecnologías actuales son muy altas, lo que nos llevará a ser capaces de manejar grandes cantidades de datos de una manera mucho más sencilla.

Además, pensemos que la mayoría de servidores actuales no dispondrán de un único procesador con un único núcleo, sino que encontraremos ejemplos con 8, 12, 24 o incluso más núcleos en una sola máquina física, por lo que podremos emplear también el paradigma MapReduce en estos casos de manera local y sin necesidad de múltiples servidores.

8.1. Splunk

Splunk es una plataforma software que permite integrar, transformar y visualizar datos, procedentes de infinidad de fuentes (logs del sistema, bases de datos, aplicaciones, datos estáticos, etc.), para generar así inteligencia y proporcionar visibilidad al usuario.

En el caso concreto de las tecnologías de la información, Splunk proporciona *Inteligencia Operacional*, que proporciona información en tiempo real de lo que está ocurriendo en tu infraestructura informática para que el usuario pueda tomar decisiones más acertadas (Splunk, 2015).

Componentes

Los principales componentes de Splunk son (Splunk, 2015):

- *Apps*: Aplicaciones que se ejecutan en Splunk. Por ejemplo, existe una aplicación para integrar R con Splunk y permitir el análisis de datos empleando este lenguaje, para luego pasar los resultados de vuelta a Splunk así visualizarlos o seguir procesándolos de alguna otra manera.
- *Forwarder*. Sería la instancia que recoge y envía datos a los servidores centrales.
- *Indexer*. Es el componente que indexa y almacena los datos que recibe y los transforme en eventos para permitir su búsqueda.
- *Receiver*. Normalmente el receptor será también *Indexer*, pero podría ser un *Forwarder*, que entonces enviará los datos al *Indexer*.
- *Search Head*. Es la instancia que permite la gestión de búsquedas, pero que no realiza la búsqueda en sí, y el análisis en su interfaz gráfica. Tampoco guarda los datos.
- *Search Peer*. Normalmente el *Indexer* también será el encargado de realizar las solicitudes de búsqueda que le llegan desde el *Search Head*.

MapReduce en Splunk

Splunk emplea el paradigma MapReduce de manera automática cuando se ejecuta una búsqueda. En este caso el componente *Seach Head* realizará las tareas de Reduce, mientras que los nodos, *Search Peers*, ejecutarán la fase de Map coordinados por el anterior (Splunk, 2011).

Hunk

Un componente opcional, pero que merece la pena destacar dentro de la infraestructura de Splunk, sería *Hunk*, el cual proporciona una capa de abstracción entre Hadoop y Splunk, permitiendo así la ingestión y análisis de datos almacenados en Hadoop a través de la interfaz gráfica de Splunk de una manera cómoda y simplificada (Splunk Hunk, 2015).

Análisis de datos y toma de decisiones con los datos de ventas

Lo interesante de este programa es su análisis para que ayude en la toma de decisiones. Para hacer este análisis más sencillo, haremos uso de las capacidades gráficas de Splunk y presentaremos esta información en un panel de control que posteriormente podremos compartir con dirección para que accedan vía web, o si lo prefieren mediante un PDF generado diariamente que les llegaría automáticamente por correo eléctronico.

Este panel estará formado a su vez por cinco subpaneles:

- Subpanel 1: “Top 10 de ventas en los últimos 7 días”.
- Subpanel 2: “Top 5 de productos con mayor beneficio por venta”.
- Subpanel 3: “Top 5 de productos con peor beneficio por venta”.
- Subpanel 4: “Ventas por día de la semana en el último mes”.
- Subpanel 5: “Comparación de las ventas por hora entre mejor y peor producto frente a las ventas medias de todos”.

El resultado final de nuestro panel general sería el indicado en la Figura 4-3, el cual nos proporcionaría información extremadamente útil para entender qué productos se venden más y en cuales deberíamos poner mayores esfuerzos, días de la semana con menor tráfico, diferencia en los patrones de ventas entre productos estrella y productos con poco mercado, etc.

Por ejemplo, es fácil observar que los sábados nuestras ventas descienden considerablemente respecto al resto de días de la semana, por lo que quizás sería interesante promocionar algún tipo de descuento ese día para atraer así a más clientes. O si en lugar de centrarnos en las ventas globales nos fijamos en las ventas por producto y día, podríamos llegar a la conclusión de que el cliente no compra determinados productos los sábados y sería necesario buscar una explicación al respecto para intentar compensar esta pérdida de ventas de alguna manera.

Si pensamos que estos datos eran una minúscula parte de lo que una empresa actual recoge a diario, nos daremos en seguida cuenta del potencial de este tipo de herramientas, que basadas en la estadística, nos pueden proporcionar a la hora de tomar de decisiones, aunque es obvio que será necesario el empleo tanto de especialistas informáticos como de expertos del negocio que entiendan cómo funciona la empresa y sepan dar contexto a los resultados, previo a la toma de decisiones por parte de los gestores.

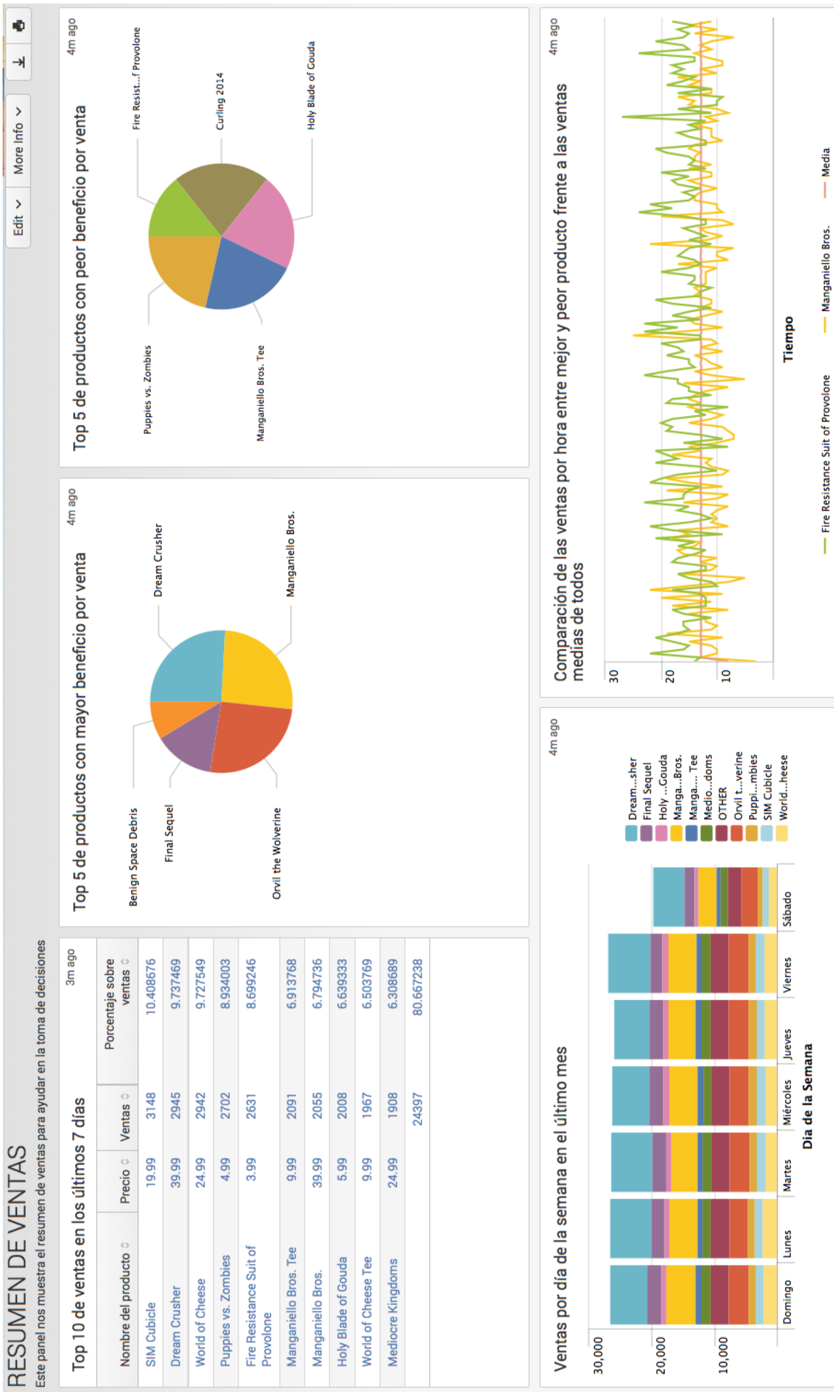


Figura 0.3
Panel resumen de ventas

Otros casos de uso

Si bien el caso de los datos de ventas es un ejemplo típico de libro en el uso de Splunk, existen infinidad de posibilidades en otros campos y cuyo único requisito es la ingesta de datos adecuados.

Si centrásemos el análisis de datos en los eventos del sistema operativo, sería muy fácil construir un modelo estadístico que definiese la media de accesos aceptados y denegados por usuario y día a un determinado servidor corporativo. Una vez creado este modelo, Splunk nos permitiría definir una serie de alertas basadas en desviaciones no esperadas del comportamiento habitual. Por ejemplo:

- Usuario A accede al sistema B tres veces por día de lunes a viernes, pero este viernes accedió veinte. Sería necesario entender qué ha pasado, por lo que generaremos una alerta en forma de correo electrónico para que el equipo de ciberseguridad lleve a cabo una investigación.
- Usuario C falla al escribir su contraseña una media de dos veces por semana, pero durante la última hora se han producido diez accesos fallidos con este nombre de usuario a diversos servidores de la empresa. ¿Se ha producido un ataque informático y alguien está intentando usar las credenciales del Usuario C para acceder a nuestros sistemas, o por el contrario el Usuario C no está teniendo un día muy acertado?

Otro ejemplo sencillo sería si además de la información disponible en los datos del ejemplo, tuviésemos acceso a métricas sobre porcentaje de uso de CPU, almacenamiento y memoria en los servidores de la empresa. En este caso podríamos correlar esta información con los datos del servidor Web para concluir si cuando existen picos de accesos a nuestra Web, los servidores no se encuentran saturados en términos de rendimiento y por lo tanto el cliente final no percibe una mala experiencia como usuario.

Como casos de uso más avanzados es posible el empleo de Splunk en la predicción y modelización de fenómenos corporativos, dada su capacidad para modelar datos y las herramientas que incorpora de aprendizaje automático. Uno de los ejemplos más clásicos es su empleo por parte de cadenas de supermercados para predecir las tendencias de ventas en función de la previsión del tiempo y así sacar a la venta productos más adecuados. Por ejemplo, si es sábado y se espera sol y más de 25 grados, pongamos el carbón de barbacoa y las hamburguesas a un precio ligeramente superior al que ofrecimos el año pasado en la misma situación cuando las ventas fueron un éxito.

9. CONCLUSIONES

Hemos pretendido exponer, bajo una perspectiva moderna, cómo la estadística en combinación con la tecnología actual, nos puede ayudar en el análisis de cantidades enormes de datos y facilitar de esta manera la toma de decisiones corporativas.

Si bien no es única ni necesariamente la más popular, una de estas tecnologías modernas como Splunk proporciona una interfaz relativamente sencilla para el usuario, sin ahorrar en opciones avanzadas, y que nos permite, desde la ingesta de datos de todo tipo hasta el posterior análisis tanto numérico como visual, abstrayendo al usuario menos técnico de los detalles más complicados y proporcionando, extraordinarias posibilidades gráficas que ayudarán en la toma de decisiones.

BIBLIOGRAFÍA

DIEBOLD, F.X. (2003), “'Big Data' Dynamic Factor Models for Macroeconomic Measurement and Forecasting” (Discussion of Reichlin and Watson papers), in M. Dewatripont, L.P. Hansen and S. TURNOVSKY (eds.), *Advances in Economics and Econometrics*, Eighth World Congress of the Econometric Society. Cambridge: Cambridge University Press, 115-122.

DIEBOLD, F.X. (2012), “A personal perspective on the origin(s) and development of “big data”: The phenomenon, the term, and the discipline (Scholarly Paper No. ID 2202843). Social Science Research Network (2012) (Retrieved from http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2202843).

LANEY, D. (2001), “3 D Data Management: Controlling DataVolumen, Velocity and Variety”. META group Inc., 2001. (http://blogs.gartner.com/doug-laney/files/2012/01/ad949-3D-Data-Management-Controlling-Data-Volume-Velocity-and-Variety.pdf).

IBM Group: “¿Qué es Big Data?”. (https://www.ibm.com/developerworks/ssa/local/im/que-es-big-data/).

IDC iView, “The Digital Universe Decade –Are You Ready?” May 2010, sponsored by EMC. (http://www.emc.com/digital_universe).

IDC iView, “Big Data, Bigger Digital Shadows, and Biggest Growth in the Far East,” December 2012, sponsored by EMC. (www.emc.com/leadership/digital-universe/index.htm).

IDC iView “The Digital Universe of Opportunities: Rich Data and the Increasing Value of the Internet of Things” April 2014, sponsored by EMC. (http://www.emc.com/leadership/digital-universe/index.htm).

PRESS, G (2013), “A Very Short History of Big Data” Forbes. (http://www.forbes.com/sites/gilpress/2013/05/09/a-very-short-history-of-big-data/).

RABBANI, F. y ROGHANI, A. (2014). *Big Data Analytics for Beginners.* Crux Tech Ltd.

LOHR, S. (2013). “The origins of ‘big data': an etymological detective story”. The Washington Post february 1.

TechAmerica Foundation's Federal Big Data Commission (2012). “Demystifying big data: A practical guide to transforming the business of Government (Retrieved from http://www.techamerica.org/Docs/fileManager.cfm?f=techamerica-bigdatareport-final.pdf).

Páginas Web:

Apache. (2015). *Hadoop*. Recuperado el 2015, de https://hadoop.apache.org

Eviews. (2015). *Eviews Home*. Recuperado el 2015, de http://www.eviews.com

Gracia, L. M. (2013). *Explicando MapReduce*. Recuperado el 2015, de Un poco de Java: https://unpocodejava.wordpress.com/2013/05/22/explicando-mapreduce

Hortonworks. (2013). *Apache Hadoop Core Components*. Recuperado el 2015, de http://docs.hortonworks.com/HDPDocuments/HDP1/HDP-1.2.4/bk_getting-started-guide/content/ch_hdp1_getting_started_chp2_1.html

Maplesoft. (2015). *Maple Home*. Recuperado el 2015, de http://www.maplesoft.com/products/maple

Mathworks. (2015). *Matlab*. Recuperado el 2015, de http://www.mathworks.com/products/matlab

Netlib. (2015). *LAPACK*. Recuperado el 2015, de http://www.netlib.org/lapack

Octave. (2015). *GNU Octave*. Recuperado el 2015, de https://gnu.org/software/octave

Pydata. (2015). *Pandas*. Recuperado el 2015, de http://pandas.pydata.org

Rabbani, F., & Roghani, A. (2014). *Big Data Analytics For Beginners.* Crux Tech Ltd.

R-Project. (2015). *R-Project Home*. Recuperado el 2015, de http://www.r-project.org

SAS. (2015). *SAS Home*. Recuperado el 2015, de www.spss.com

Scipy. (2015). *Scipy Home*. Recuperado el 2015, de http://www.scipy.org

Splunk. (2011). *Splunk and MapReduce*. Recuperado el 2015, de http://www.splunk.com/web_assets/pdfs/secure/Splunk_and_MapReduce.pdf

Splunk. (2015). *Splunk Home*. Recuperado el 2015, de http://www.splunk.com

Splunk Hunk. (2015). *Hunk Home*. Recuperado el 2015, de http://www.splunk.com/en_us/products/hunk.html

Stata. (2015). *Stata Home*. Recuperado el 2015, de http://www.stata.com

Statgraphics. (2015). *Statgraphics Home*. Recuperado el 2015, de http://info.statgraphics.com/statgraphics-home

Wikipedia. (2015). *List of Statistical Packages*. Recuperado el 2015, de Wikipedia: http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_statistical_packages

Wolfram. (2015). *Mathematica*. Recuperado el 2015, de http://www.wolfram.com/mathematica

CAPÍTULO 11

CARDANO Y LOS JUEGOS DE CARTAS. EL JUEGO DE LA PRIMERA, PRECEDENTE DEL PÓKER

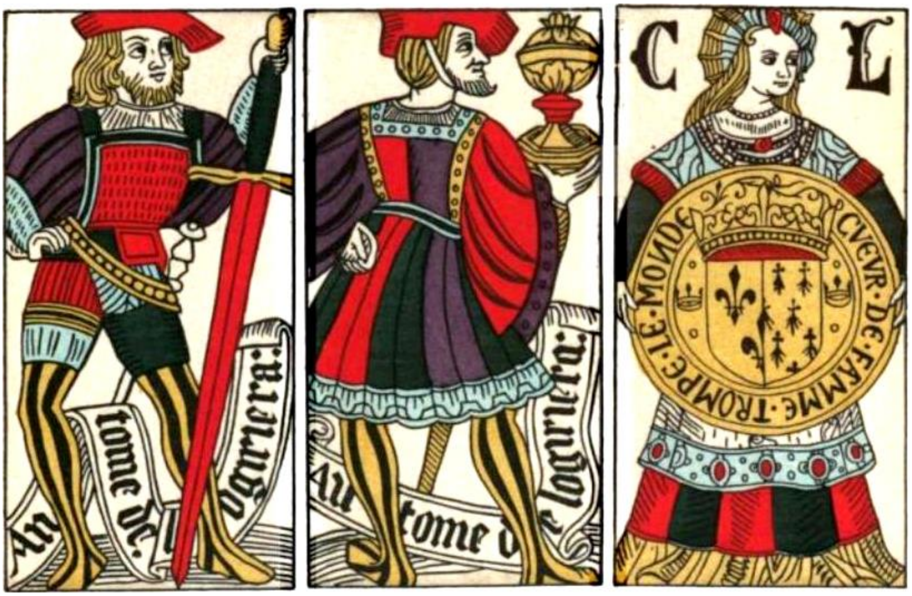
MARY SOL DE MORA CHARLES
Universidad del País Vasco

El texto de Cardano De Ludo Alea (~ 1560) es famoso por sus reflexiones acerca de los juegos de azar. No obstante, los estudiosos, en general, han centrado su atención sobre los juegos de dados o de astrágalos, que proporcionan un modelo matemático para los cálculos, con preferencia a los de cartas, cuya descripción no es tan accesible para la época actual. El juego de La Primera, que ha dado lugar posteriormente a otras variantes, es analizado por Cardano en el mencionado texto (publicado póstumamente). Veremos aquí las reflexiones y advertencias que hace el autor, en este caso de las cartas, sobre las posibles trampas, la influencia de la fortuna (o la suerte) y la posibilidad de agentes extraordinarios, como genios, amuletos y otros residuos de las supersticiones antiguas. Asimismo, se decanta Cardano por aquellos juegos de azar en los que hay una importante componente de habilidad, que los hace más interesantes que los de puro azar. Pero, contrariamente al póker de la época actual, clasifica La Primera entre los juegos de azar, sin acción o habilidad por parte del jugador, aunque lo presenta como "el más noble".

Los juegos de dados son más claros y sin misterio, en el supuesto de que no se hagan trampas, porque se ve inmediatamente el resultado de los mismos, mientras que las cartas permanecen ocultas para los demás jugadores hasta la conclusión del juego, al menos parcialmente.

En La Primera se dan cuatro cartas, de dos en dos, por ser el cuatro el número de los elementos de la Naturaleza (tierra, agua, aire y fuego). También son cuatro los palos de la baraja. Las cartas de cada palo son trece, pero en La Primera se descartan ochos, nueves y dieces, de forma que quedan 40 cartas.

Curiosamente, las figuras eran en principio la sota o soldado, el rey y la dama o reina, como en esta figura de cartas españolas (1495-1518), de autor desconocido. (*Fuente*: Leo S. Olschki, *La Bibliofilia*, Firenze: Giuseppe Boffito, 1906).



Pero más tarde, la baraja española sustituyó la dama por el caballo:

No obstante, la baraja francesa continuó con la dama:

Además, como era usual en muchos juegos, los valores de las cartas no eran los mismos que los que aparecen en cada una de ellas, así:

El 2 vale 12 puntos

El 3 vale 13 puntos

El 4 vale 14 puntos

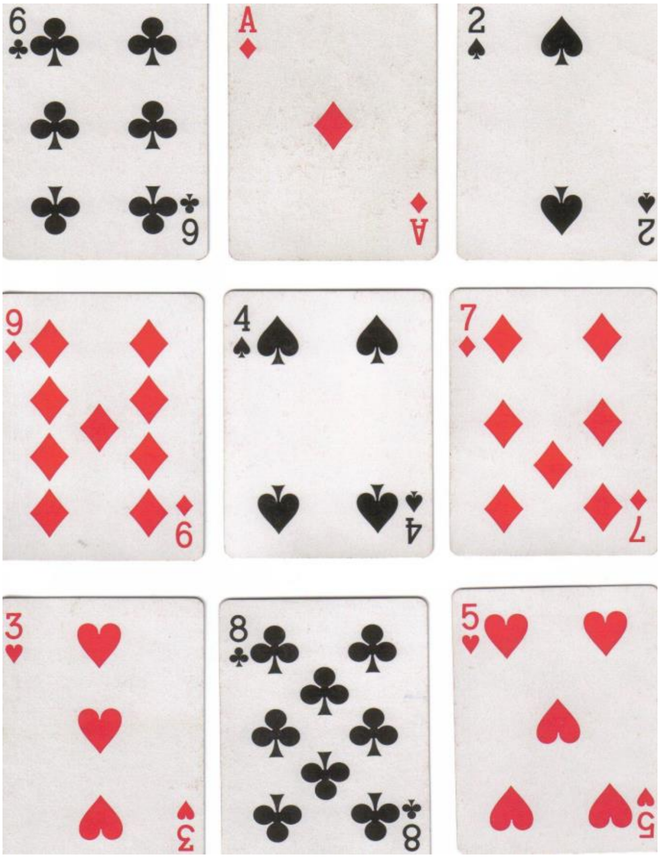
El 5 vale 15 puntos

El 6 vale 18 puntos

El 7 vale 21 puntos

El As vale 16 puntos

Las figuras valen 10 puntos cada una.



1. PRINCIPALES JUGADAS EN LA PRIMERA

Las jugadas, de menor a mayor valor, serían:

1. **El Número**: dos o tres cartas del mismo palo:
   El valor mínimo son dos cartas menores: dos figuras, 20 puntos, el valor máximo, el Número **Supremo,** tres cartas, el As, el seis, y el siete, que son **55** puntos, (16+18+21).

2. **La Escalera:** cuatro cartas del mismo palo, el valor mínimo es las tres figuras más el as: 30+16= 46. El valor máximo sería **70** = 16+15+18+21
3. **La Primera**: todas las cartas de distinto palo, pero no iguales: desde 42 puntos (tres figuras y un dos), hasta **81** puntos (tres sietes y un seis).
4. **El Coro:** tiene todas las cartas iguales, por ejemplo, cuatro sietes, o seises o reyes. Pero no vale mezclar otra figura como la reina o la sota. Si se enfrentan con cuatro de esas figuras, no ganan los reyes sino el jugador que está más

cerca del lado derecho del que da las cartas. El valor máximo es **84** y el mínimo sería 40.

Como no se utilizaba comodín, el póker o Coro tenía solo cuatro cartas iguales.

Cardano explica en su texto algunas de las jugadas que se aconseja declarar antes del final y las estrategias para cambiar de jugadas durante el descarte. Las cartas descartadas se dejaban a la vista. En su calidad de jugador experimentado, Cardano no explica con detalle el mecanismo del juego, sino solamente algunos aspectos del mismo, por lo que es muy complicado reconstruir sus reglas. No obstante, hay una reconstrucción italiana en Girolamo Zorli: *Il gioco della Primiera di Girolamo Cardano*: (http://www.tretre.it/menu/accademia-del-tre/documenti-e-articoli/la-primiera-di-girolamo-cardano)

1. **Primeras dos cartas.**

1B: Un jugador envida poniendo en el plato una o dos fichas. La invitación no forzaba a los otros a pagarlo para seguir en el juego. Después,

1Ba): si todos pasan, el último jugador está obligado a sostener el envite con una ficha.

1Bb): si alguno relanza el envite doblando, ningún otro está obligado a sostener el envite.

Al término de la fase del envite, los jugadores que no han pagado deberán descartarse de una o dos cartas. Los que han pagado podrán quedarse con las dos.

2. **Segundas dos cartas**.

Jugadores con dos-tres-cuatro cartas.

2.1. Todos pasan y todos los que se han descartado de al menos una carta, repiten la fase (tienen hasta cinco cartas).

2.2. Un jugador declara **primera** o **escalera.**

2.2A Si todos pasan, muestra las cartas y ha ganado el plato.

2.2B Si otro declara una combinación similar, los dos contendientes pasan a la fase 3.2

2.3. Un jugador declara un punto y dice "voy" por una cantidad libre. Se podía echar un farol, pero no sobre **primera** o **escalera**. No se consentía declarar menos de lo que se poseía.

2.3.A. Todos pasan. El plato es ganado por quien ha apostado el "voy".

2.3.B. Uno o más jugadores aceptan el voy y lo pagan. Se consentía elevar la apuesta hasta el resto. Los jugadores que pagaban el envite y el eventual aumento pasaban a la fase 3.

3. Después del "voy".

Se hace una última distribución de dos cartas a los que quedan en juego.

3.1 Todos pasan. Todos se descartan para encontrarse con un máximo de tres cartas y repiten la fase 3.

3.2 Se declara una combinación y se hace una apuesta. Las apuestas eran ilimitadas hasta el resto.

3.2.a Alguno acepta y se descubren las cartas.

3.2.a.1 En caso de farol, el plato es obtenido por el desafiado.

3.2.a.2 En caso de declaración correcta,

3.2.a.2.a El poseedor de la mejor mano gana el plato.

3.2.a.2.b En los tres casos, los dos jugadores pasaban a la fase 4.

3.2.b. Cuando alguno envida hasta el resto. Si el envite es aceptado, vale la fase 3.2.a.

3.2.c El declarante gana el plato, mostrando suficientes cartas para garantizar que no ha declarado menos de lo que tenía.

4. El duelo final.

El duelo final era una prolongación del juego que tenía lugar cuando dos jugadores en la fase 3.2 tenían las manos siguientes:

4.1 Un **punto** de dos cartas contra un **punto** de tres cartas.

4.2. Un intento de **primera** contra un **punto**.

4.3 Un intento de **escalera** contra cualquier otra combinación.

Los dos jugadores dividían la mitad del plato en porciones aproximadamente iguales a la probabilidad de victoria. El que desafiaba, recibía dos cartas en los casos 4.1 y 4.3 o una en el caso 4.2. El vencedor ganaba la mitad restante del plato.

El juego de la Primera admitía muchas variantes, por lo que era necesario ponerse de acuerdo sobre sus reglas antes de empezar a jugar, sobre todo porque al ser un juego de fortuna, podía provocar muchas discusiones y violencia entre los que perdían, pues eran tiempos violentos. Cardano estaba muy interesado en evitar tanto a los violentos como a los tramposos, y previene a sus posibles lectores con bastante detalle:

> *"Las cartas tienen en común con los dados que lo que se desea puede ser obtenido mediante fraude, y el más odioso es el que es respaldado con la espada;*

[es decir que acaba en derramamiento de sangre]

> *un segundo tipo tiene que ver con el reconocimiento de las cartas; en este género lo peor son las cartas marcadas, otros modos son más excusables,*

[Le parecen más excusables los métodos basados en la memoria, aunque las consecuencias, que son el "hundir la carta" en el mazo para que salgan antes las demás, tampoco serían nunca aceptadas si se descubrieran]

> *como cuando se colocan las cartas en un orden especial y es necesario recordar ese orden. Cuando lo conocen, tienen la costumbre de hundir la carta hasta el fondo, distribuyendo las otras, que no se debían a la suerte, hasta que ellos utilizasen la suprimida. Pero los otros jugadores en la primera clase mencionada*

[las cartas marcadas]

> *llevan a cabo fraudes muy peligrosos que merecen la muerte, como de hecho también este último, aunque está más oculto. Sin embargo, aquellos que saben solo concentrándose qué cartas pueden esperar, no suelen ser llamados tramposos, sino que son clasificados entre los cautos."*

Es realmente un oficio de pícaros el marcar las cartas, y requiere una gran habilidad para que las marcas sean casi imperceptibles y una buena memoria para recordar las marcas:

> *"En cuanto a los que usan cartas marcadas, unos las marcan abajo, otros arriba y algunos a los lados. Las del primer tipo están marcadas muy cerca del borde y las marcas pueden ser ásperas o suaves o duras; las segundas están marcadas con color y con tenues señales con una navaja: mientras que en los lados hay figuras, asperezas, nudos entrelazados o con protuberancias, o pequeñas señales excavadas con una lima."*

También había trampas mediante objetos o personas ajenos a las cartas mismas, como los mirones que contemplaban el juego de pie. El "órgano" era un tablero suelto debajo de la mesa, sobre el que el jugador ponía el pie, recibiendo señas de un cómplice que movía el tablero ligeramente, en general tirando de un cordel desde otra habitación:

> *"Algunos jugadores examinan la apariencia de una carta mediante espejos colocados en sus anillos. Omito aquí los modos de los trucos que llevan a cabo los que están de pie, como el órgano, o el consenso."*

Otro de los argumentos que utiliza reiteradamente Cardano es el de que no es aconsejable jugar, incluso, como ahora, pretende convencernos de que el juego no proporciona ningún placer:

> *"Ciertamente, a la vista del poco placer que proporciona jugar y la rareza con la que favorece a nuestros deseos, hay tantas dificultades en ello y tantas posibilidades de perder, que realmente no hay nada mejor que no jugar en absoluto, pues también hay aquellos que embadurnan las cartas con jabón, de manera que puedan resbalar fácilmente y pasar de una a otra. Universalmente el juego no es más que*

fraude y números y fortuna. Contra el fraude el único remedio es que tengas cuidado con los hombres de vasto ingenio; pues así como los buenos no son defraudadores, los defraudadores no pueden ser buenos. Cuando sospeches de fraude, juega por poco dinero, invita a observadores, baraja las cartas y no las superpongas, y si otros las superponen y no las mezclan, hay trampa. Posee tus propias cartas, y si se envían a comprar, que se compren a los tuyos. Examínalas por dentro y fuera y toca en ángulo los bordes; si son ásperos, o demasiado suaves, o duros, o desiguales, no juegues; porque antes de que puedas reconocer lo que está mal, quizá te hayas arruinado. Finalmente, no dejes a ninguno examinar las cartas en privado.

"En la Primaria, a la que llaman Primera, se acostumbra a descubrir las cartas desde atrás y desde la parte superior, es decir la mínima porción de las cartas, de forma que los que están de pie no puedan discernirlas; pues se ve que en esto consiste gran parte de la habilidad, y de ella se jactan."

Otra clase de tramposos que Cardano señala como peligrosos o incluso reos de muerte son los prestidigitadores. No nos indica el nombre del español que tenía prohibido jugar:

"Considerable perplejidad produce lo siguiente, si los prestidigitadores son capaces de hechos tan admirables, ¿cómo es que usualmente no son afortunados en el juego? Pues parece razonable que, del mismo modo que son capaces de engañarnos con pelotitas, vasos y monedas, deberían ser capaces de hacerlo con las cartas y así invariablemente serían los ganadores. Pero al español condenado se le ordenó, es más se le prohibió (según dicen), jugar, bajo pena de muerte, porque de hecho podía mostrar a voluntad un ***Coro*** *de cuatro cartas, bien engañando a los ojos o bien cambiándolas con la agilidad de sus manos; pues necesariamente una u otra de esas cosas se relacionaba con su prodigioso arte de prestidigitación. Pero Francisco Sorna de Nápoles (del cual hemos hablado en otro lugar)*

[De Subtilitate, principio del Libro 18. Nota de Cardano]

podía cambiar las cartas tan rápidamente que nada podía imaginarse que fuera más maravilloso."

El concepto de suerte o de Fortuna tenía mucha importancia en el mundo antiguo y también Cardano trata de hallar en él alguna regularidad o alguna razón de su actitud favorable o desfavorable. Como decían los romanos, "La Fortuna favorece a los audaces". Pero Cardano se pregunta si es caprichosa o "si la suerte siempre es igual", es decir si la probabilidad de un suceso es siempre la misma:

"Se puede observar que en estos asuntos, la fortuna tiene mucha influencia, de forma que algunos disfrutan de lo que no esperaban y otros se ven defraudados en sus justas esperanzas; así pues la mediocritas

[La famosa afirmación de Aristóteles: "en el punto medio está la virtud"] *no es un argumento pertinente. Pues ese término medio está compuesto de extremos, no como en los litigios o en las estimaciones o en otros casos similares. Pues todos están de acuerdo en que un hombre puede ser más afortunado que otro, o incluso que él mismo en otro momento de su vida, no solo en los juegos, sino también en los negocios, y más con un hombre que con otro, y más en un día que en otro.*

Y si alguno lanzase el dado con suerte desigual varias veces, más con un resultado, menos con otro, en menos ocasiones de lo que sería adecuado, o bien si siempre la suerte es igual, y si fuera así, sería por alguna razón y principio y no por suerte; si obtengo la diversidad en cada apuesta, hay algo que aparece más y menos diferente; pero de aquí no se puede deducir ninguna razón de la fortuna; sin embargo, es necesario que la fortuna exista."

[Y qué hemos de pensar de los astrólogos, que pretenden conocer los designios de la diosa Fortuna.]

"Además, los astrólogos para sí lo reivindican, aunque yo nunca vi un astrólogo que fuese afortunado en el juego, ni tampoco eran afortunados aquellos que seguían sus consejos. La razón es que aunque, como en todos los asuntos fortuitos, a veces ocasionalmente adivinan, no obstante si hubieran acertado una vez, inmediatamente después se equivocarán, (porque aun cuando no adivinan es necesario hacer la apuesta) obteniendo más pérdidas de un solo error que utilidad de su adivinación, aun teniendo éxito cuatro veces seguidas. Pues la caída en el error siempre es más pendiente y la pérdida mayor que la ganancia."

[Como sucede cuando, pensando que "están en racha", recuperarán todo lo perdido y volverán a ganar. También se siente Cardano tentado por la magia y por la astrología, e insiste en ello en varios pasajes:]

"Y he visto a otros tomar sus decisiones con ayuda de la geomancia; pero eso es vanidad sin consistencia y un peligro, aunque se haga un uso muy moderado de esta ayuda engañosa. Y aunque algunos adivinen con frecuencia, la causa es que otros se equivocan aún con mayor frecuencia, Pues como existe necesariamente alguna desigualdad, es necesario que unos acierten más y otros menos. Esto que he dicho me parecen razones verosímiles."

No obstante, en el fondo sigue creyendo en la existencia de influencias sobrenaturales o esotéricas, cree en un "Arte" que un Genio debería dominar, ese don de predicción no sería un don sino un método, tal vez el método de la probabilidad, que el propio Cardano no se resistiría a investigar. De otro lado está la Fortuna, es decir el puro azar:

"Ahora bien, me parece digno de consideración el hecho de que esta fortuna mía parezca haber sido mayor que la mera Fortuna, pues vemos en ella un principio, un aumento y un cierto desarrollo, de forma que suceden algunas cosas notables, como por ejemplo que aparecen dos veces dos ases cuando no se podía evitar

la derrota de otro modo, y otras cosas de este tipo. También veríamos una decadencia y con mucha frecuencia un cambio, y entonces grandes calamidades o mucha buena fortuna y otras cosas parecidas. A la vista de todo esto yo pensaría que tenemos que decidir que hay algo en ello, aunque no conocemos la ley que conecta esas partes. Es como si estuvierais destinados de antemano a ser enriquecidos o despojados; especialmente viendo que de esto se puede seguir algo más importante, como le sucedió al hombre que, abandonando un juego después de perder todo su dinero, injurió la imagen de la Sagrada Virgen con su puñal. Fue arrestado y condenado a ser colgado."

[En este caso se trataría de un castigo divino y por lo tanto no tan heterodoxo. Y se repliega a la idea de que la influencia de las estrellas o el orden del universo no pueden influir en las cartas que conseguimos]

"Pero el hecho de que la causa de esa fortuna, ya esté en la conjunción de las estrellas o en la construcción de un cierto orden del universo, pueda afectar a las cartas, que son consideradas buenas o malas solo de acuerdo con las convenciones del hombre (sin que signifiquen nada por sí mismas), es tan dudoso que es más fácil encontrar una causa de este hecho sin ese propósito que con él: sin ello el asunto se puede reducir fácilmente a lo casual, como en la constitución de las nubes, la forma en que se esparcen las habas y otros parecidos."

Otro aspecto interesante de su análisis del juego en general es el aspecto psicológico del mismo, y cómo la actitud del jugador, su miedo o su espíritu de aventura pueden modificar los resultados:

"Por esta razón es natural preguntarse ¿por qué los que tiran los dados con miedo son vencidos? Si es que la misma mente presagia los males. Pero debemos liberar a los hombres de esos errores, pues aunque podría pensarse que es cierto, tenemos una razón más evidente. Pues cuando alguno comienza a sucumbir a la fortuna adversa, acostumbra con mucha frecuencia a tirar los dados con miedo; pero si la fortuna adversa persiste, es necesario que las tiradas caigan mal. Así pues, como tira con miedo, la gente cree que caen desfavorablemente por esa misma razón; pero no es así. Es porque la fortuna es adversa que los dados caen desfavorablemente, y porque los dados caen desfavorablemente, pierde, y porque pierde, tira el dado con miedo. Por lo tanto, como el lanzar los dados con miedo es el cuarto en el orden, y el que caigan mal esos mismos dados es el segundo, no puede ser el cuarto la causa del segundo, ni causa propia ni causa concomitante, sino más bien al contrario. Luego, si los dados son honestos, y no los sujeta del modo que el adversario decida, no puede ser el tirarlos con miedo la causa de un número desafortunado; pues podría suceder de otro modo."

No obstante, como jugador empedernido, aconseja a los no expertos no jugar en ocasión alguna, pues hasta las gentes de honor cometen graves errores si se dejan arrastrar por la pasión del juego.

> *"Conjeturar acerca del presente es más el papel de un hombre prudente conocedor del saber humano; pero, acerca de lo que el futuro pueda ser, es otro tipo de conjetura, no acerca de lo que vaya a ser el futuro, sino de lo que podría ser esperable, pero eso más bien es propio de un hombre divino, o de un loco, pues los melancólicos suelen adivinar. Porque en el juego de dados no hay ningún signo seguro, sino que todo reposa sobre la pura fortuna, si el dado es honesto. Cualquier cosa que pueda haber en él, más allá de una leve conjetura y de las razones dadas más arriba, debe ser declarada una temeridad. Pero en las cartas, un hombre prudente está en condiciones de reconocer la cara de las cartas por el dorso, y otros mil reconocimientos naturales, y dignos. Entre todos los juegos, el que supera a todos los demás en sutileza es el Latrunculi. Pero el arbitrio de la fortuna poco o nada subyace a la utilidad de las armas, a la saludable pelota, a la gracia de la Trápala, a la belleza de invención y variedad de la Primera, a la magnitud pecuniaria más respetuosa, a la asidua disputa que fatiga poco del Fritillo, al paso del tiempo del Tarocchi, a la dignidad del Cricones, a la prudencia y la imitación de la vida humana del Triunfo. Así pues, es más apropiado para los sabios jugar a las cartas que a los dados, y al Triunfo más que a los otros juegos."*

Pero conocer las reglas del juego, el conocimiento, aun siendo importante, no puede asegurar el éxito frente a la práctica y la experiencia y sobre todo, frente a la suerte. Por eso Cardano considera análogos el juego, la guerra y el comercio, donde tenemos que jugar también con la probabilidad, con las situaciones que no son totalmente o principalmente inmunes al azar:

> *"Quizá alguien preguntará con razón si los mismos que conocen las reglas juegan bien o no. Pues parecen ser cosas diferentes saber y ejecutar, y muchos que juegan muy bien son muy poco afortunados. Pero la misma cuestión se plantea en otros asuntos. ¿Un médico sabio, es también experto? En aquellos asuntos que dan tiempo para la reflexión, el mismo hombre es a la vez sabio y afortunado, como en las matemáticas, la jurisprudencia y también la medicina, pues es raro que el hombre enfermo no admita demora. Pero en aquellos asuntos en los que no se concede tiempo y prevalece el dolo, una cosa es conocer y otra practicar con éxito, como en el juego, en la guerra, en la lucha individual y en el comercio. Pues, aunque el ingenio depende a la vez del conocimiento y de la práctica, todavía la práctica y la experiencia pueden hacer más que el conocimiento. Además, un cierto conocimiento material es de mayor valor en aquellas materias en las que se necesita de conocimientos especiales, como en la estimación de gemas, en la pintura y en el reconocimiento de las monedas auténticas o adulteradas.*
>
> *De manera que están en causa tres elementos, no todos de igual importancia, esto es, la naturaleza física, el ingenio y la rapidez. Y así Aníbal estaba en lo cierto al burlarse del filósofo que nunca había visto una línea de batalla y hacía discursos sobre la guerra. Así sucede con todos los juegos que dependen de la arbitrariedad de la fortuna, bien enteramente, bien junto con el ingenio, cuando se juega con rapidez y no hay tiempo para una meditación, y puesto que los juegos físicos, que dependen de la agilidad de la mano y de la agudeza del ojo, están sujetos al entrenamiento, no es sorprendente que saber sea una cosa y ejercitar el propio saber y ejercerlo sea otra. En ciertas materias, como en los asuntos militares, el conocimiento unido a la práctica es de gran ayuda, pero no la práctica para el conocimiento; pues lo que es principal en cada materia debe preceder y ser más importante."*

Todo esto intriga a Cardano y le lleva una y otra vez a pensar si hay algo en el ingenio externo al ingenio, si tiene sentido creer en los elementos que representan para él la Fortuna: amuletos, piedras preciosas, el destino… La Fortuna debe tener alguna razón, alguna ley para su comportamiento, solo que no la conocemos. Así, según la teoría clásica, si fuéramos Dios, podríamos conocer los resultados, porque conoceríamos todas las variables que hacen caer el dado de una determinada manera, o las cartas en un determinado orden. Pero siendo hombres, solo tenemos la probabilidad, lo que él llama el circuito y que le proporciona la probabilidad 1/2 cuando se considera su mitad.

> *"Puesto que es necesario, además de la práctica, que nos da conocimiento de los fraudes, tener agilidad, rapidez, sentidos agudos, conocimiento y método, nos queda como digno de duda: ¿hay algo más allá de todas esas cosas que contribuya a la victoria en el juego? Y me refiero también al caso en el que hay tiempo para la reflexión; pues este es el elemento más importante, junto con el juicio que surge de ello. Unos proponen unas cosas y otros otras. Hay piedras que, según dicen, aumentan la prudencia de aquellos que las llevan y sé que las esmeraldas están entre ellas, e igualmente otras piedras aumentan la audacia como las llamadas Nicolos. [ónice]. Pero aquí no es cuestión de esta o de otras cosas semejantes, sino que (como he dicho) debemos discutir la cuestión de la fortuna. Así, igual que hay cambio en las personas, edades, años, días, meses y horas, así el cambio varía la fortuna, y en lo que cambia hay necesariamente alguna cosa, puesto que se ha aceptado que cambió. Por ejemplo, si yo fuese a perder mañana y ganar el día siguiente, tendría que haber necesariamente alguna cosa tal como mañana y pasado mañana; quizá alguien dirá que no hay nada, excepto el tiempo, que cambia o puede cambiar la fortuna, y esta razón no es absurda, puesto que la variación del tiempo depende del destino y otras cosas no. Entones, si el futuro debe ser o bien no ser, ¿cómo puede cambiarse mediante amuletos? El mismo argumento demuestra que ni un médico ni un barbero ni un señor de la guerra, deberían curar mejor, o cortar el pelo mejor, o conducir mejor la guerra si estuvieran desprovistos de estas cosas. Incluso si eso fuera cierto, como es tan absurdo y contrario a la opinión y al razonamiento humanos, no veo cómo se puede admitir. Examinemos por lo tanto lo que sea esa fortuna y de qué principio dependa; ciertamente me parece que es una disposición de los asuntos de acuerdo con, o contraria a, la voluntad o a los pensamientos de un hombre; de manera que no importa cómo actúes, el asunto sale bien o mal, o concuerda con los planes humanos o no concuerda. La felicidad es doble, igual que en las cosas humanas la fuerza y la violencia dolosa, y puede adaptarse a nuestro plan o defraudarnos. Pues tanto si me quedo en casa como si no me quedo, de todas maneras puede resultar malo; suceda lo que suceda, estamos sujetos a la autoridad del Príncipe. Así es también en los juegos. Por tanto, congruencia o no congruencia, hay dos modos, uno de ellos absoluto y el otro relativo al plan o al juicio. Estos asuntos se tratan en los libros sobre el destino, pero en tanto afectan a la cuestión presente, es suficiente decir aquí que la fortuna se cambia mediante alguna razón, como se cambia un plan, algunas veces abiertamente, como cuando voy a la guerra y experimento una fortuna diferente que si hubiese ido de viaje o me hubiese quedado en casa, pero a veces secretamente, como en el juego, como cuando agito [los dados] más o menos, y sale un punto diferente con cada diferente impulso. Por lo*

tanto la fortuna se oculta doblemente en secreto, ya sea cambiando el plan del cual resulta la acción, o bien por medio de un suceso que es fortuito en comparación con las circunstancias existentes. Por ejemplo, yo tengo un enemigo, y su mala fortuna es así parte de mi plan; pero si su poder aumentase mediante el matrimonio de su hija, eso corresponde a la fortuna y no tiene nada que ver con mi plan. Pues, aunque la razón de la primera de esas dos cosas no es evidente, no obstante, está fuera de duda. Por tanto, debemos pensar que hay algún método en ello y que cualquiera puede ser bendecido o infortunado, exactamente de la misma manera que aquellos que juegan mientras beben, o furiosos, o con miedo, o sospecha, cosas que son familiares para todos. Pero existe también otro modo que es alguna razón oculta. A esos casos pertenecen los amuletos, la magia y cosas parecidas, y lo mismo que en cada caso (como se suele decir) la espada entra en su vaina y el pie en su zapato, así la hora, el día, el año y el lugar deben ser los adecuados; así también en este asunto lo que haría a un hombre feliz haría a otro desgraciado. Pero lo más importante parece ser el juicio y la previsión, porque proporciona un consejo de largo alcance. Pues las otras cosas admiten un tratamiento ordinario, es decir, cosas que son evidentes y que no llegan más allá de una jugada o dos.”

Por último, Cardano insiste en la importancia de los contrincantes y de su carácter, así como de la atención a los detalles, como si hay espectadores del juego y demasiadas conversaciones. Pero el carácter del autor se muestra de nuevo en su rechazo de los juegos que exigen un silencio absoluto, porque para él anulan gran parte del placer del juego.

Incluso el mal tiene sus leyes propias, como en el caso de los ladrones y los piratas. Hay algunos que, con muchas palabras, a otros y a sí mismos privan de su propio entendimiento. Omito hablar de aquellos que, como si estuvieran locos, gritan insultos contra los dioses. Algunos son pendencieros, que provocan de tal modo la ira de los hombres, que lo olvidarían todo. Finalmente los hay que lanzan pullas a los adversarios; otros son silenciosos, que es lo mejor, si no exigen lo mismo a sus adversarios. Hay un método en estas cosas: que se juegue sin olvidar en primer lugar las jugadas, y de ellas las que conducen a la victoria; que no se estuviera enfadado; que no se provocase la ira, que no se tuviera miedo, que no se hablara sin sentido, que no se vejase al compañero, máxime cuando se está perdiendo. Que recuerde su persona, la del adversario, a los que están de pie y el lugar. Si el adversario no es de este tipo, mejor no jugar. Pues como un poco de bilis en mucha miel, y poca cosa podrida mezclada con mucha cosa deliciosa puede provocar el vómito, mucho más que todo aquello agradable, así el adversario depravado puede eliminar todo el placer del juego y alejar más de él el deleite que se percibe, como si restallase un látigo. Así la taciturnidad más cercana al silencio absoluto, es demasiado dura y severa, cuando sería un mayor placer hablar y no jugar, que jugar y no hablar.

CAPÍTULO 12

GABRIEL GALAN Y SU "CÁLCULO DE LAS PROBABILIDADES"

FRANCISCO JAVIER MARTÍN-PLIEGO LÓPEZ
Universidad Rey Juan Carlos

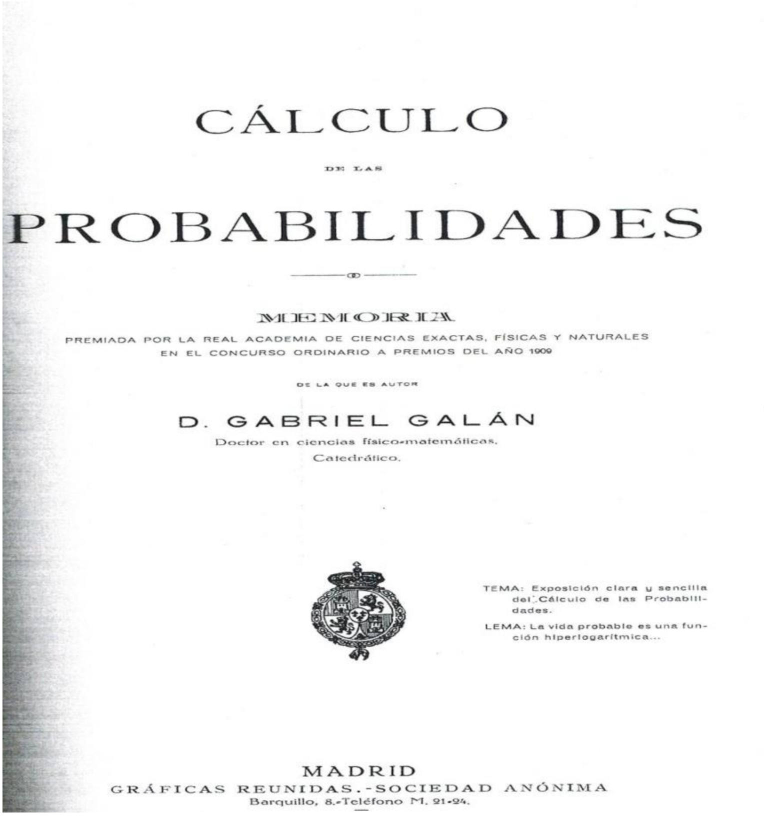
JESÚS SANTOS DEL CERRO
Universidad de Castilla-La Mancha

1. INTRODUCCIÓN

Gabriel Galán fue un matemático español, que ejerció como profesor en la cátedra de astronomía y geodesia de la Universidad de Zaragoza y la de geometría analítica de la Universidad de Oviedo, a finales del siglo XIX y en el primer tercio del siglo XX y que obtuvo el primer premio del concurso ordinario de premios del año 1909 de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de España que llevó por título *Cálculo de las Probabilidades.* Desde un punto de vista histórico es una obra moderna que recoge los tópicos que se recogían en los tratados de la época en el resto de países más avanzados en el desarrollo de esta especialidad y en el que el nivel de los desarrollos matemáticos es muy meritorio. Sin embargo, esta obra no resulta muy conocida puesto que se publica en un momento en que se está produciendo un cambio sustancial en el enfoque científico con el que se estudia el Cálculo de las Probabilidades. Podríamos decir que el esquema de aproximación teórica clásica comienza a ser sustituido por lo que se conoce como estadística matemática en donde destacan las aportaciones de Bowley, Czuber, Pearson y Yule, entre otros, así como Kolmogorov un poco más tarde, que van a configurar un nuevo modelo analítico de la disciplina que nos ocupa. Es en este entorno en el que debemos interpretar y valorar la obra que será objeto del presente trabajo.

El contenido de este estudio se estructura en unas notas biográficas que se desarrollan en el segundo epígrafe, al que le sigue un análisis de los contenidos de la obra

"Cálculo de las Probabilidades" de Gabriel Galán, para terminar con un epígrafe cuarto en el que se realiza un análisis del entorno bibliográfico del "Cálculo de las Probabilidades" de este autor.



CÁLCULO

DE LAS

PROBABILIDADES

MEMORIA

PREMIADA POR LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES
EN EL CONCURSO ORDINARIO A PREMIOS DEL AÑO 1909

DE LA QUE ES AUTOR

D. GABRIEL GALÁN

Doctor en ciencias físico-matemáticas.
Catedrático.

TEMA: Exposición clara y sencilla del Cálculo de las Probabilidades.
LEMA: La vida probable es una función hiperlogarítmica...

MADRID
GRÁFICAS REUNIDAS.-SOCIEDAD ANÓNIMA
Barquillo, 8.-Teléfono M. 21-24.

2. NOTAS BIOGRÁFICAS

Gabriel Galán nace en Chinchón (Madrid) el 18 de marzo de 1869 y es el hijo mayor de Valentín Galán (oriundo de Chinchón) y Genera Ruiz (según los libros del Padrón de Chinchón es oriunda de Santa Cruz, por lo que suponemos que por la proximidad a Chinchón se refiere a Santa Cruz de la Zarza (Toledo)). A la vista del Padrón de diversos años del municipio del Chinchón consultados tuvo al menos dos hermanos (Arturo y Valensiniano) y tres hermanas (Águeda, Nohé y Estefanía). Se comprueba además que en el año 1899 Gabriel ya no reside en el domicilio familiar.

En fecha de 24 de junio de 1966 el señor Isaac Villalba Alfaro, como secretario del Ayuntamiento de Chinchón, certifica el acuerdo adoptado en sesión plenaria de su Corporación Municipal de otorgar "Homenaje a Don Gabriel Galán Ruiz" de carácter póstumo pues falleció en 1938. Entre los méritos personales se indica que se formó como matemático, fue Doctor en Ciencias Exactas y Fisicoquímicas y obtuvo por oposición la cátedra de astronomía y geodesia de la Universidad de Zaragoza y la de geometría analítica de la Universidad de Oviedo.

En el mismo documento en el que se rinde homenaje se señalan varias obras de carácter científico tales como “Notas para el estudio del triángulo infinitesimal”; “Estudio analítico geométrico de las funciones hiperbólicas”; “Teoría de los sistemas de unidades”; “El eclipse de sol en 1905”; “Lecciones de cosmografía, de astronomía esférica y de geodesia”; “Las conquistas de la astronomía”, etc. Añade a este listado una obra que, aparte de haber sido premiada por la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales en el concurso ordinario a premios del año 1909 y que fue publicada en Madrid en 1923: *Cálculo de Probabilidades*, es el objeto principal de análisis en este trabajo.

Junto a los méritos anteriores se le reconocen cualidades humanas vinculadas a su conducta ejemplar y cariño hacia su pueblo. Todo ello supone este reconocido homenaje que finaliza con la petición al Ministerio de la Gobernación de cambiar el nombre de la que ese momento era la actual calle del Espino de la localidad de Chinchón a calle “Don Gabriel Galán”. Con fecha 12 de septiembre de 1966 el Gobierno Civil de Madrid a través del Director General de Administración Local concede la autorización solicitada de cambio de nombre de la citada calle.

Es autor también Gabriel Galán de dos discursos de apertura de curso en las dos universidades en las que ocupó una cátedra. El primero fue leído en la Universidad de Zaragoza en la solemne apertura del curso 1907 a 1908 y el tema del mismo fue la astronomía. Se imprimió en Zaragoza, Tipografía de Emilio Casañal, y aparece como Catedrático Numerario de la Facultad de Ciencias. El segundo fue leído en la solemne apertura en la Universidad de Oviedo del curso académico 1923-24 y trató sobre los grandes geómetras. Se imprimió en Oviedo (Tipología de Florez, Gusano y Comp. ª) y aparece como Catedrático Numerario de la Facultad de Ciencias. De ambos discursos, el que más nos interesa por el tema tratado es el segundo. Cita a Laplace y a su Ensayo Filosófico sobre las Probabilidades y reproduce la idea de probabilidad asociada al grado de conocimiento de las múltiples causas que provocan un suceso. Habla también de Pascal y Fermat como creadores del cálculo de probabilidades “excitada la imaginación de ambos por los problemas que el caballero de Meré, jugador aristócrata un poco libertino, les proporciona”. También recoge en este discurso a Jacobo Bernoulli y su Ars Conjectandi así como menciona a Poincaré y su originalidad en varias materias, entre ellas el cálculo de probabilidades.

3. “CÁLCULO DE LAS PROBABILIDADES”

La memoria presentada al concurso ordinario de premios del año 1909 de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales que llevó por título *Cálculo de las Probabilidades* se estructura en dos partes diferenciadas. La primera parte la denomina

Teoría Elemental en la que desarrolla conceptualmente un conjunto de tópicos relacionado con el Cálculo de Probabilidades. La segunda parte que llama Teoría Complementaria desarrolla los temas de la primera parte, pero enfatizando los principios analíticos y demostraciones matemáticas de los conceptos incluidas en la primera parte. Incluye además un apéndice “Sobre la curva de mortalidad de España” así como una serie de tablas y figuras que complementan los contenidos de ambas partes.

Prólogo

Realiza una revisión de la historia de la Ciencia del Cálculo de Probabilidades en la que destaca a Galileo como su principal iniciador y a Laplace como artífice de la principal sistematización del citado cálculo.

Primera parte: Teoría Elemental

Se compone de cinco capítulos que analizaremos separadamente, destacando en cada uno de ellos aquellos aspectos que nos resultan de interés para los objetivos de este estudio.

El capítulo lo dedica a los conceptos de coordinaciones (en terminología moderna serían variaciones), permutaciones y combinaciones. Además, desarrolla ciertos conceptos y teoremas elementales en los que resultan interesantes las demostraciones de las distintas fórmulas de variaciones, permutaciones y combinaciones.

En el capítulo 2 analiza las diferencias entre las leyes físicas y las morales, siendo en estas últimas donde surge el concepto de probabilidad. Aquí aparecen claramente influencias laplacianas en relación al origen de dicho concepto pues recurre a la idea de que la ignorancia humana induce a que haya que utilizar el concepto probable para medir aquella parte de un hecho o suceso sobre la que no existe completa certeza.

Del mismo modo el concepto de probabilidad lo define materialmente como cociente entre casos favorables y casos posibles tanto en su sentido contable como geométrico, enfatizando en cualquier caso la condición necesaria de que todos los casos sean “igualmente posibles” (probables).

En el capítulo 3 desarrolla la teoría de errores y mínimos cuadrados.

El capítulo 4 lo dedica a los juegos de azar. Define el concepto de esperanza como la ganancia por la probabilidad de ganar, estableciendo como juego justo aquel en el que lo depositado iguala a dicha esperanza. Existen descripciones y análisis detallados de las probabilidades y esperanzas de distintos juegos de azar y loterías tradicionales, algunos ya en desuso y otros vigentes hoy en día. Trata también del problema del reparto de apuestas en el caso en el que el juego se interrumpa antes de la finalización del mismo.

En el capítulo 5 trata sobre ciertas aplicaciones a las ciencias sociales. Analiza varios problemas relativos a los intereses generados por un capital a interés simple y a interés compuesto. Realiza también un análisis de las tablas de mortalidad utilizando para ello las siguientes tablas clásicas:

- Déparcieux (1746)
- Duvillard (1797)
- Tabla H^m (Inglaterra)
- Tabla Assurés Français
- Tabla de las Compañías Alemanas

Segunda parte: Teoría Complementaria

Como hemos señalado antes la Segunda Parte la denomina Teoría Complementaria en la que desarrolla y plantea demostraciones de un conjunto de tópicos tratados de una manera más conceptual en la Primera Parte (Teoría Elemental) tales como:

- Análisis trigonométrico
- Fórmula de Wallis
- Fórmula de Stirling
- Integrales en el Cálculo de Probabilidades
- Fórmula de Fourier
- Teorema de Bernoulli
- Teorema de Bayes
- Ley de Probabilidad de los errores
- Problemas de la ruina del jugador
- Paradoja de San Petersburgo

4. ANÁLISIS DEL ENTORNO BIBLIOGRÁFICO DEL “CÁLCULO DE LAS PROBABILIDADES” DE GABRIEL GALÁN

Unos años antes de la publicación del *Cálculo de las Probabilidades* Gabriel Galán (en Madrid, 1923), texto incluido en el Tomo XXX de Memorias de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, se publica en el tomo XXVIII de las Memorias de la misma institución una obra con el mismo título pero debida a Manuel Velasco de Pando que fue premiada con accésit y publicada en 1918. Este trabajo de Manuel Velasco utiliza como referencias los textos de Jacob Bernoulli, Laplace, Poincaré, Bertrand, Laurent, Lacroix y Gauss. En su introducción cita también a Condorcet y Poisson de los que dice “aparecen con frecuencia en el Cálculo; pero la lectura de sus obras no es de las más fecundas”. Cita también al tratado de Ollero de 1896 pero en sus referencias bibliográficas no lo recoge. Este trabajo recopila los tópicos básicos que se recogían en los tratados sobre Cálculo de Probabilidades de la época, en el que aparecen algunos desarrollos y demostraciones matemáticas, aunque no con el mismo nivel de detalle y profundidad del texto de Gabriel Galán.

Por su parte, la bibliografía referenciada por Gabriel Galán es mucho más extensa, cita explícitamente en ella a Fermat y Pascal. Cita a Huygens, De Moivre y Montmort, lo que demuestra un mayor conocimiento de la historia y creación del cálculo de probabilidades. También recoge la *Exposition de la théorie des chances et des probabilités* de Cournot y el *Calcul des probabilités et théorie des erreurs* de Liagre, que se encuentra en la tradición laplaciana de este cálculo.

Como ya hemos señalado, aparece la referencia bibliográfica del *Tratado de cálculo de probabilidades* de Diego de Ollero de 1896. El Tratado de cálculo de probabilidades de Diego Ollero constituye un hito importante en la introducción en España del cálculo de probabilidades moderno y demuestra una actitud atenta y receptiva por los avances científicos europeos sobre el citado cálculo en un siglo en el que, según algunos autores, se consuma en España uno de los períodos en que se produce un mayor distanciamiento en el progreso científico. A finales del siglo XIX, concretamente en el año 1879, el comandante de artillería Diego Ollero publica su Tratado de cálculo de probabilidades que representa el primer manual moderno sobre el cálculo de probabilidades en castellano en donde se recogen influencias claras de científicos como Gauss, Laplace, Lacroix, Liagre, etc. [1]

El texto de Ollero constituye un tratado moderno sobre el cálculo de probabilidades como apuntó el profesor Sánchez-Lafuente. El planteamiento metodológico y la aplicación de herramientas matemáticas que observamos en el Tratado de Ollero corresponden a los de una obra moderna cuyo nivel científico no difiere de las principales publicaciones sobre el cálculo de probabilidades de países como Inglaterra, Bélgica, Francia, etc.

En cuanto a su contenido introduce con gran detalle ciertos resultados matemáticos necesarios sobre cuestiones relativas al cálculo de probabilidades, la Teoría de Errores y el Método de los Mínimos Cuadrados. Un capítulo lo dedica al análisis de la noción de probabilidad y los principios fundamentales del cálculo de probabilidades, dentro de la tradición laplaciana del concepto de probabilidad. Otro capítulo lo dedica al estudio de la probabilidad de sucesiones o repeticiones de sucesos de un fenómeno, centrándose especialmente en fenómenos dicotómicos, en donde otorga un especial énfasis al Teorema de Bernoulli. Los capítulos centrales de la obra de Ollero los dirige hacia la preparación, exposición y análisis de nociones necesarias para dicho objeto, que no es otro que la Teoría de Errores y el Método de los Mínimos Cuadrados.

Como hemos mencionado más arriba, tanto Velasco Pando como Galán introducen temas aplicados a las ciencias sociales. En concreto, en el capítulo 5 Galán ana-

[1] SANTOS DEL CERRO, J. (2004): *Diego Ollero: el primer tratado moderno español sobre cálculo de probabilidades,* en AHEPE: HISTORIA DE LA PROBABILIDAD Y LA ESTADÍSTICA (II). Madrid: Delta Publicaciones.

liza problemas relacionados con los intereses generados por un capital a interés simple y a interés compuesto y también dedica una extensa parte de dicho capítulo al análisis de las tablas de mortalidad. Este hecho refleja el aumento de interés, principalmente a partir de las contribuciones de Quetelet, de aplicar el Cálculo de probabilidades a las Ciencias Sociales en general.

En estos mismos años, se publican dos obras que aparecen referenciadas y comentadas por F. Y. Edgeworth, que son, por una parte, Matemática de la Mortalidad con Elementos de Probabilidades (contiene 86 páginas) cuyo autor es Isidoro Rubio y que imprime en Valladolid, 1924; por otra parte, Introducción a la Metodología Estadística (Fundamentos de Estadística Matemática) (obra de 247 páginas) cuyo autor es Antonio de Miguel y contiene un prólogo de Flores de Lemus fue publicada en Madrid, 1924. De esta segunda, nos dice Edgeworth que sus métodos "recuerdan" a los adoptados por Bowley, Czuber y Pearson.

Es precisamente en los años veinte donde se empieza a configurar la estadística matemática, produciéndose en estos años una clara ruptura con lo que había sido hasta ese momento lo que podemos denominar el Cálculo de probabilidades tradicional, una de cuyas muestras es el tratado de Gabriel Galán. Con posterioridad a la publicación del *Cálculo de las Probabilidades* de este autor aparece el que se considera el primer manual con todas las características de un manual de estadística matemática a cargo de Antonio de Miguel (1924), de estilo anglosajón y que utiliza como referencia los textos de A. L. Bowley y G. U. Yule. En precisamente en ese momento de transición en el desarrollo de la ciencia de las probabilidades donde debemos ubicar el trabajo de Galán. Para el caso español, utilizamos las palabras de Arribas:

> *"La enseñanza del cálculo de probabilidades había ya comenzado en el interior de las academias militares (D. Diego Ollero) y en las Escuelas de Ingenieros (José Antonio de Artigas), pero es en la Facultad de Ciencias de Madrid donde va a comenzar la enseñanza de la estadística matemática. En 1931, Esteban Terradas comienza a impartir cursos, y es en 1934 cuando Olegario Fernández Baños obtiene por concurso la Cátedra de Estadística matemática de la Facultad de Ciencias de Madrid"*[2].

BIBLIOGRAFÍA

ARRIBAS MACHO, J.M. (2004). Los comienzos de la estadística matemática (1914-1936) en AHEPE (2004). *Historia de la Probabilidad y la Estadística (II).* Delta Universidad, Madrid.

GALÁN RUIZ, G. (1907). *Discurso leído en la Universidad de Zaragoza en la solemne apertura del curso de 1907 a 1908*. Tipografía de Emilio Casañal, Zaragoza.

GALÁN RUIZ, G. (1911). *Curva teórica de la mortalidad en España.* Eduardo Arias, Madrid.

— (1923). *Cálculo de las Probabilidades*. Gráficas Reunidas, Madrid.

[2] ARRIBAS MACHO, J.M. (2004): *Los comienzos de la estadística matemática (1914-1936)* en AHEPE: *Historia de la Probabilidad y la Estadística* (II), Madrid: Delta Publicaciones.

— (1923). *Discurso leído en la solemne apertura del curso académico 1923-24*. Tipografía de Flórez, Gusano y Compª, Oviedo.

LACROIX, S. F. (1864). *Traité Élémentaire du Calcul des Probabilités.* 4ª ed. Paris.

LAPLACE, P.S. (1812). *Théorie Analytique des Probabilités*. Imprimeur-Librairie Courcier, Paris.

LIAGRE, J. B. J. (1852). *Calcul des Probabilités et Théorie des Erreurs, avec des applications aux sciences d´observation en général, et de la géodésie en particulier.* Alexandre Jamar, Bruxelles.

MARTÍN PLIEGO, F. J. (1997). "Historia de la probabilidad en España". *Revista de Historia Económica*. Año XV, Invierno 1997, nº 1.

MIGUEL, A. DE (1924). Introducción a la *Metodología Estadística (Fundamentos de Estadística Matemática).* Imprenta de Samarán y cia, Madrid.

OLLERO, D. (1913). *Tratado de Cálculo de Probabilidades.* 4ª edición. Madrid.

RUBIO, I. (1924) *Matemática de la Mortalidad con Elementos de Probabilidades*. Benito Allín, Valladolid.

SÁNCHEZ-LAFUENTE, J. (1973). *Historia de la estadística como ciencia en España* (*1500-1900*) II. Estadística Española. nº 60 y 61.

SANTOS DEL CERRO, J. (2004). «Diego Ollero: el primer tratado moderno español sobre cálculo de probabilidades» en AHEPE (2004). *Historia de la Probabilidad y la Estadística (II).* Delta Universidad, Madrid.

VELASCO DE PANDO, M. (1920). *Cálculo de las Probabilidades*. Establecimiento Tipográfico de Fontanet, Madrid.

CAPÍTULO 13

RENÉ GATEAUX: LIFE, DEATH AND MATHEMATICAL LEGACY

LAURENT MAZLIAK
Université Pierre et Marie Curie (París)

This paper is about René Gateaux, a mathematician who died at 25 at the beginning of the First World War. The study I have devoted to him has recently been published in two papers [1] and [2]; the first one focuses on the mathematical aspects of Gateaux's life, and the second one gives precisions on complements about his life and provides also several original documents. I refer the reader to them for all the bibliographical aspects and for further details.

Examining the life and works of René Gateaux allows to gain an idea of what was the life of a young student at the beginning of the 20th century, a life brutally brought to an end by the war. One of the major things to be gleaned from this biographical approach is that it allows us to clarify aspects of the mathematical life in France around the time of the Great War. We must fully appreciate the extent of the slaughter of young students generated by these tragic events. For instance, out of the 280 students who entered the École Normale Supérieure between 1911 and 1914, 241 were sent to the front where 101 died. If, as stated by the President of the Republic, Raymond Poincaré, the school of 1914 had fully revenged the school of 1870 (year of the French terrible defeat in the Franco-Prussian war) we cannot but admit that the price paid for this was enormous.

This paper is mostly related to Gateaux's biography and I shall make only general comments on the mathematics he was involved in. For details on them, I confer interested listeners to my aforementioned papers. Let me above all mention that in studying Gateaux we can discover an important chapter in the history of 20th century mathematics and the surprizing emergence in the 1920s of fundamental links between functional analysis and the modern theory of probability.

In 1923, the prominent American mathematician Norbert Wiener published his seminal paper, called "Differential Space" where he provided the first mathematical model for the Brownian Motion, the random motion of particles suspended in a fluid discovered in 1827 by the botanist Robert Brown, and studied as a physical phenomenon by Einstein in 1905. Wiener's work dates from nine years after the death of René Gateaux. Wiener points out in his introduction that in the heart of his theory lies a notion of integration on infinite dimensional spaces. He wrote:

> *Now, integration in infinitely many dimensions is a relatively little- studied problem. Apart from certain tentative investigations of Fréchet and E.H.Moore, practically all that has been done on it is due to Gateaux, Lévy, Daniell, and the author of this paper. Of these invertigations, perhaps the most complete are those begun by Gateaux and carried out by Lévy in his Leçons d'Analyse Fonctionnelle.*

The book Wiener refers to was published by Paul Lévy a year earlier, in 1922, after the lectures read by Lévy in 1919-1920 at the Collège de France, about which I shall return to later. Wiener discovered the book straight after its publication, and, being in France during the summer months of 1922, immediately discussed it, at length, with Lévy. Indeed, in his 1923 article Wiener does not hide the source of the form he adopted for the integration on infinite dimensional spaces he had been looking for. The appearance of René Gateaux's name in Wiener's paper was in fact a surprise to me. How can it be that the work of a very young mathematician, who died at the age of 25, previously than even submitting his doctoral thesis, before occupying any academic position, author of only a few brief notes, could be cited by Wiener in such a strategically important article? Furthermore the name of René Gateaux is still known today (sometimes even to undergraduates students!) through the notion of Gateaux's Differential, which corresponds to the directional derivative of a function with one or several variables, while Fréchet's differential represents the derivability in all possible directions. All this deserved an explanation, and it was the source of my interest for René Gateaux.

Straight away let me reveal the key to this mystery: why has the name of René Gateaux been passed down to us instead of being, like the majority of his companions in misadventure, only a simple gilded word on the square of our towns, that is, an inscription on a war memorial, in the splendid words of the poet Louis Aragon. Indeed Gateaux, during his brief career, was lucky enough to have met top ranking mathematicians, like Emile Borel, Jacques Hadamard and above all Vito Volterra. These mathematicians who raised the deceased Gateaux to the levels of a hero, facilitated the spread of his reputation, and, more surprisingly, of his work though it was in a very preliminary state. At this point I wish to stress that we must obviously not exaggerate the stature of Gateaux: Gateaux is not an Abel, to name another example of a mathematician who died very young at the age of 27. Through this interest for Gateaux, the idea is to shed some light on the mathematical life in France around WW1.

This is the plan of my talk. I'll make first some comments on Gateaux's years of learning. Than we shall turn to his Roman stay and next to his war campaign, before concluding by considering his surprising mathematical destiny.

We know very little about the childhood of René Gateaux. He came from Vitry le François, a small town in the Marne, 150km east of Paris. His father was a small artisan (he owned a small workshop manufacturing saddles and harnesses for horses). René seems to have been a brilliant pupil, obtaining his baccalauréat at 16 years old (two years younger than the norm) and, at 18, he gained a place in the Ecole Normale Supérieure. Two students of the Normale of his year, Georges Gonthiez and Maurice Janet, have left a touching testimony of their young friend:

> *He had that certain freshness of spirit you find in truly honest people who have not yet been tarnished by life. On arrival to the École Normale, he was happy to open his spirit to new ideas with an ease and calm of a fine intellect, modest yet sure of itself. He immediately showed himself as being one of the most gifted mathematician of our group, serious and willing to focus on the essentials. He loved engaging in all sorts of arguments, general and philosophical.*

An event in 1908 made a significant mark in the life of René Gateaux. He decided to be baptized into the Catholic Church. At the end of the 19th century, the french artisan classes in which he was brought up were often strongly anti-clerical. During the period immediately after the Dreyfus Affaire, in which the Church had often acted deplorably, a number of active Christian groups were formed aiming to resume contact with the intellectual classes. Pierre Poyet, a student of the Nor- male in the same year as Gateaux, was nicknamed "the apostle of the Ecole Nor- male" because of the number of pupils he converted, of which Gateaux was one. And in fact, in a biography of Pierre Poyet I found the only identified photograph of René Gateaux that I know of. Gonthiez and Janet both stress the importance of this baptism. They write for instance:

> *In truth, it's extraordinary to see the parallels in the life of Gateaux between his religious practice and his public life.*

In 1910, René Gateaux obtained the Agrégation in Mathematics which allowed him to teach in a Lycée. In fact, only after two years, in October 1912, having completed his National Service, did he begin teaching. The French Law of 1905 reduced the term of national service to 2 years but made it universal (at least for men!). Article 23 of this law states that the pupils from the Ecole Normale had to serve one year as regular soldiers and one year as officers (sub-lieutenant). Gateaux's military file I found seems to imply that he was a conscientious officer. One reads there:

> *Second term 1912: M. Gateaux has made great progress. Very intelligent, very conscientious and means well, wants to do his best. He has become a very*

> *good section commander, would be useful in the event of mobilization. He has followed a training course in shooting obtaining excellent results.*

So in October 1912, Gateaux finds himself teacher at the lycée in Bar-le-Duc, the maintown of the department of Meuse, 200 km east from Paris. Already, by the end of that year, he asked for a year's sabbatical to go to Rome. Indeed he was just beginning his doctoral thesis on functional calculus, a discipline created by the Italian mathematician Vito Volterra in the 1890s which, thanks to Hadamard, was greatly developed further, in France, during the beginning of the 20th century. Hadamard made it the subject of his lectures in the Collège de France in 1910. In

1911 Paul Lévy defended his brilliant thesis on this very subject, and, in 1912, Volterra came to Paris to give a course in the Sorbonne on the theory of functions of lines. This course was edited by Joseph Pérès, who, that same year, obtained a grant to stay in Rome: that was the first grants given by the David-Weill foundation to a science student. Gateaux therefore applied next year for this grant, backed up by Borel who wrote to Volterra:

> *M. Gateaux, presently teacher of the Lycée in Bar-le-Duc, recently talked to me about his intention to apply for a grant regarding his research relating to work done by yourselves. I have advised him to ask for a grant, similar to Pérès, and to go to Rome. I enclose a letter where he informs me of his intentions and his application for a grant. I intend to support his candidacy*

As Hadamard wrote later on:

> Gateaux was one of that group who, while starting a tradition that cannot be praised enough, went to Rome to learn the theories and methodology of Volterra.

On this we have an extraordinary document: the letter Gateaux wrote to Borel containing the research program he intended to follow in Rome. It is a very long letter of around ten pages. It is not the proper place to analyze this letter but I wish to point out that Gateaux already is talking about integration in infinite dimension. On August 1913 Gateaux informed Volterra of his arrival in Rome in October. We have very few details about his stay in Rome as once arrived, the young man no longer wrote to Volterra! It does, however, appear to have been a period of great energy. Four notes were published one after another in the rendiconti of the Accademia dei Lincei, which, in essence, were supposed to be the beginning of his thesis. In January 1914 Borel wrote to Volterra that he was happy to hear that Volterra was pleased with Gateaux's work. On February 14th, Gateaux gave a lecture in the Mathematical seminar of the University of Rome.

Gateaux returned to France in June of 1914 and immediately asked for another grant (this time from the Commercy Foundation) to return to Rome during the year

1914-1915. In a letter to Volterra, dated July 1914, he explained that his grant had been attributed, and so he would be back at the end of summer. This letter, written fifteen days before the outburst of the First World War, is further evidence of how the French were aware of the possibility of war only at the last minute, and, that the general mobilization on August 2nd came as a complete surprise nearly to everybody. Gateaux was immediately made lieutenant in the 269th infantry regiment stationed near Nancy.

August 1914 was the most disastrous month for the French forces. August 22nd 1914, the worst day of the whole war for France, saw 27,000 dead. Even the slaughters of Verdun or of the Chemin des Dames came nowhere near this sad record. The reasons were multiple: the famous red uniform worn by the French troops often turned the field of battle into target practice, the recklessness of the head of command which demanded advancing at whatever cost, the lack of preparation of junior officers, which were often students, and were particularly hit during these initial weeks. But there was also a kind of super-patriotic voluntarism from these junior officers, going well beyond the simple call of duty. For instance, Fernand, Borel's adopted son, killed in 1915, wrote in a letter to his adoptive mother Marguerite Appell:

> *Being a socialist fighting for peace and understanding amongst nations, I want to be sent to the front line to show that I am as brave as anybody. Those who survive will have earned the right to speak out, head held high, in front of the shirkers.*

Another extraordinary document we have is Gateaux's last letter from the battlefield to Volterra. It shows his joy in knowing of the Italy's decision to opt for neutrality.

I deeply thank you for your letter I have just received, in the fields of Lorraine where we live days and nights under the sound of canons. I wanted to tell you how happy I was to learn that Italy, not only remains neutral, but is also more and more favorable to France. All the French people have been sensitive on that point, and have greatly appreciated Italy's attitude. May that act encourage our two countries to know each other better and to become closer! The mail service works with much irregularity. I intend to write to you soon again and I hope that at least one of my letters will reach you. I hope it will find you and your family in good health. As for me, I bear perfectly the fatigue of the battle.

The question of Italy's attitude in the war was of prime importance at this moment. Volterra was a passionate interventionnist and he wrote many letters on the subject to his French colleagues right from the start of the conflict as seen in our various studies with Rossana Tazzioli.

By the end of August 1914 the British and French forces were in an almost desperate position, locked by the German pincer manoeuvre (the northern arm violating

Luxemburgian and Belgian neutrality following the Schlieffen plan). The reaction, often referred in France as the Miracle of the Marne, was the massive French counteroffensive which halted the German advance but fifty kilometres from Paris forcing the German army to retreat 150 km. The front settled around the end of September between the Somme valley and the Swiss border, remaining practically unchanged until the end of summer 1918. One sole area was left unlocked: between the Somme and the North Sea, where for five months the two armies at- tempted to surround each other. This is the period called the "Race to the Sea", one of the bloodiest moments of the war. The 70th division, to which Gateaux be- longed, was transported by train to near Arras in the north-east of France, as part of a huge rail manoeuvre stretching across 500km. On the 2nd October they took up position in Rouvroy near Lens. On the 3rd October, around one in the morning, the Germans attacked and Gateaux who was leading a group of machine-gunners, was killed. The corpses were quickly buried, and it was only in 1920 that they were exhumated and buried in the necropolis of Bietz-Neuville St Vast. Gateaux was officially recognized as laying down his life for France in June 1922.

This marks the end of Gateaux's life. But here began a little miracle. We don't exactly know how the news of Gateaux's death was communicated to the academic community. A postcard, sent by the headmaster of the lycée of Bar-le-Duc, December 1914, which, perchance, I found at the Académie des Sciences in Paris, played a crucial role. The headmaster notified indeed that Gateaux had left documents containing notes on the principle points of his thesis to his mother.

> *Our late lamented colleague M. Gateaux has only his mother left. She lives now in Vitry-le-François. In the so cruel mourning which strikes her, she would be very touched by your condolences and it would be a painful joy for her to read your appreciation of the great intellectual value of her dear loss. I saw M. Gateaux for the last time on July 20th. Neither of us thought about war. He told me at length about his stay in Rome, and told me that his doctoral thesis was almost completed. He has therefore left works which merit being published and I think you could speak to his mother about it. The death of our young colleague has painfully moved all his colleagues of the Lycée in Bar who had been able to appreciate his fine intelligence, the frankness of his character and the charm of his modesty. He valiantly did his duty up to the end, but it is a great pity that he was not given the opportunity to live a full life.*

The director hence mentionned that Gateaux had left papers which may be worth examining.

Borel immediately informed Volterra of the death of Gateaux:

> *Victory will, unfortunately, be paid for with irredeemable loss; of all the sad news I have recently received the one which gives me the greatest pain*

is of the death of Gateaux. The circumstances in which it was announced to us leave us little hope for error. I would, however, still hope that out of the dozens of pupils of the Ecole Normale who have considered as missing, there will be at least one or two who will return at the end of the war.

And Volterra replied:

> *Gateaux was extremely talented and, I am sure, would have had a great future. He always developed his ideas in a very sound fashion. He worked very hard last year, and I have no doubts that the foundations of his thesis were ready. So many young souls have fallen victim to this war! It is just awful to think of it.*

As soon as August 1915, Hadamard wished to award a prize from the Académie des Sciences to Gateaux. He wrote, in August 1915, to the secrétaire perpétuel Emile Picard:

> (René Gateaux) *has left us some very advanced research on functional calculus (his thesis was practically complete and represented by the notes given to the Académie), research which both M. Volterra and myself hold in great esteem.*

The Francoeur prize of 1916 was awarded, postumously, to René Gateaux. In his statement Hadamard writes that

> (René Gateaux) *had started on a much more bolder path, and one which promised to be amongst the most fruitful, extending the concept of integral to the functional field. Nobody can predict the development and application that might have followed this new line of research. Above all, it's this very thing that was cut short by these circumstances.*

However, as we shall see, that was not the end of the story. In his autobiography of 1970, Paul Levy explains

> *In January 1918 I was lying on a hospital bed when, all of a sudden, I started to think about functional analysis. In my early work I had never considered extending the notion of integrals to spaces of infinite dimensions. It suddenly occurred to me that it would be possible to approach this from the notion of average on a sphere of the space of square-integrable functions. Such a function can be approximated using a scale function, in which the value n of distinct values increases indefinitely. This mean value could thus be defined as the limit of the mean in a sphere of a space with n dimensions. Of course this limit may not actually exist; but, in reality, it often does.*

In December 1918 Lévy is asked to deliver the Cours Peccot at the Collège de France. In theory, this course was usually reserved for a promising young mathematician, less than 30 years old. Lévy was 32, but the extent of the war losses meant that exceptions to the rule had to be made. The 1922 book, "Leçons d'Analyse fonctionnelle", was based on these lectures. Lévy contacted Maurice Fréchet, the great specialist of the time in the integration of abstract spaces, for his advice:

> *Finding myself recently concentrating on the question of extending the notion of multiple integral to the functional space, I spoke with M. Hadamard concerning this subject, who informed me of the existence of a note by R. Gateaux. But he failed to give me the exact reference and I am unable to find it. (...) Even though I am still in the army, I am preparing a course I hope to give in the College de France on the functions of lines and partial derivative equations, and in this instance I wish to further develop some of the main points of the theory (...) I think that the generalization of Drichlet's problem will present major difficulty. Up till now, for the general case, I have not been able to use your work on first grade functions and the extension of Green's formula. This is due to the fact that I have yet to put the notion of multiple integrals into a form suitable for this task.*

A few days later Lévy writes to Fréchet:

> *Regarding the works of Gateaux, just yesterday I found out that Hadamard had placed them safely in the Ecole Normale during the war, and has just got them back. Nothing has been published yet.*

Following Hadamard's advice, Lévy wrote to Volterra:

> *Hadamard has found some unpublished essays by Gateaux at the Ecole Normale. I have not seen them yet, but, maybe, I will find what I am looking for.*

And Volterra replied immediately:

> *Before he left Rome we spoke together on some rough ideas concerning this matter, but he did not publish anything about it. I think that in the manuscripts that he left, you will most likely find some notes on this subject. I am pleased that they have not been lost and that they find themselves in your hands. The question is very interesting.*

Hadamard entrusted then Lévy with the posthumous edition of the papers of René Gateaux in his memory, and, it is from this work Lévy bases his future Cours Peccot. His most important find concerns the integration in infinite dimensional spaces. Hadamard comments in a preface to this posthumous edition:

The fact that he chose functional calculus reveals a broad mind, scornful of small problems or of the easy application of known methods. But the event proved that Gateaux was able to consider such a study under its wider and more suggestive aspect. And it is what he indeed did, with integration over the functional field, to speak only about this example, the most important, that represents an entirely new path and the very great potential offered by the theory.

At this point occurs an extraordinary coincidence which, with his amazing creative talents, Lévy manages to exploit to the full. Today Paul Lévy is recognized, above all, as one of the leaders in probability of the 20th century. But in 1919 he was not yet aware of the theory of Probability. As he, himself, wrote much later to Fréchet:

As for me, I learned the first principles concerning probability in the spring of 1919, thanks to Carvallo who had asked me to deliver three lectures on the subject at the Ecole Polytechnique, and I then discovered, in just three weeks, some new results. I cannot ever claim any work in probability as my own, prior to 1919. I can also add, and I said it once to Borel, that I did not see, until 1929, the significance of the new problems resulting from the theory of denumerable probabilities. But functional calculus had well prepared me to the study of functions of an infinite number of variables, and a lot of my ideas were applied without effort to probability theory.

And so, we see how Lévy, because of his teaching obligations, was forced to study probability. The war, indeed, had shown the importance of certain techniques in Probability (especially in the calculation of errors in ballistics) and the direction of the Ecole Polytechnique suggested increasing the teaching of this discipline. Bit by bit, Lévy becomes aware that the problems of functional analysis which interest him, are most naturally expressed adopting a probabilistic form. This probabilistic interpretation is omnipresent in his third part of his Leçons d'analyse Fonctionnelle devoted to questions of integration.

By then Lévy was aware of the profound originality of his approach, and, as he himself admits, he was hoping that the lectures would receive the recognition it deserved. He was to be disappointed. We must point out the general disinterest (not to say the disdain…) held by the French mathematical community, for probability theory, dating from the mid 19th century; Poincaré and Borel were the two exceptions which nobody in France had yet followed (save Lévy and Fréchet).

While his book remained almost ignored in France, it found a passionate reader in Wiener. During the summer of 1922 Wiener came to spend some weeks in France staying with Lévy in Pougues les Eaux, a thermal town in the centre of France, where they discussed the book. As he wrote in his autobiography, Lévy was right in thinking that the third part of his book was the original source of Wiener's essay on

Brownian Motion. In any case, as I have already pointed out, Wiener does not hide these influences. He wrote at the beginning of his 1923 paper

> *The present paper owes its inception to a conversation which the author had with Professor Lévy in regard to the relation which the two systems of integration in infinitely many dimensions —that of Lévy and that of the author— bear to one another. For this indebtedness the author wishes to give full credit.*

Gateaux was now treated by Wiener as a precursor, and Lévy as the principal source of his inspiration. To construct his model of Brownian Motion, Wiener uses the definition of the integral by Gateaux and Lévy. Lévy was always quite insistent that he had, in fact, discovered many things before everyone else, which may well have been true, but should rarely be said openly! Nevertheless, we must hand it to him, with regard to Wiener measure, because clearly everything was already in place in his book of 1922. Thus I'll leave him the last quote:

> *Because I have decided to conceal nothing of my own psychology, the time has come for me to say that, amongst all the discoveries that I missed out on, leaving to Wiener the discovery of the function of the Brownian motion is the one that hurts me the most, despite the fact that the existence of precursors does diminish its importance. Everything was set for me to make this discovery, and I believe I would have made it one or two years later. But Wiener beat me to it. I could only point out the fact in a booklet of the series "Mémorial des Sciences mathématiques" published in 1925, expliciting the link that exists between the ideas of Wiener with those of Gateaux. Only much later did I realize that my 1922 book had contributed to the discovery of Wiener.*

Anyways, it is clear that it is via the writings of Lévy, picked up by Wiener, that the name of René Gateaux is still known today.

REFERENCES

[1] MAZLIAK L. (2015). "The ghosts of the École Normale. Life, death and destiny of René Gateaux", *Statistical Science*, 30-3, 391-412.

[2] MAZLIAK L., "René Gateaux. A cento anni dalla morte, La Matematica nella Società e nella Cultura", *Rivista dell'Unione Matematica Italiana*, Serie I, Vol. VIII, Agosto 2015, 169-190.

CAPÍTULO 14

STATISTIQUE ET ECONOMIE MATHEMATIQUE CHEZ AUGUSTIN COURNOT

THIERRY MARTIN
Université de Franche-Comté

L'ouvrage publié par Cournot en 1838, *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses,* est généralement considéré comme l'acte de naissance de l'économie mathématique. Cependant, cette caractérisation de l'œuvre économique de Cournot soulève deux difficultés :

1°) Cournot n'est pas le premier à recourir aux mathématiques pour étudier les phénomènes économiques. La question se pose donc de savoir en quoi le traitement mathématique des phénomènes économiques par Cournot est suffisamment novateur, pour justifier qu'il soit considéré comme l'un des pères de l'économie mathématique avant Walras.

2°) Cournot est surtout connu chez les mathématiciens pour son apport à la théorie des probabilités et à la statistique. Or, ce ne sont justement pas ces instruments qu'il mobilise lorsqu'il recourt aux mathématiques pour penser les phénomènes économiques. Et on a pu croire alors à un divorce entre le Cournot économiste et le Cournot probabiliste et statisticien. Comment comprendre cette relation ou cette absence de relation entre économie mathématique et statistique chez Cournot ?

C'est cette double question que les pages suivantes se proposent d'éclairer.

1. SITUATION HISTORIQUE DE L'ECONOMIE MATHEMATIQUE DE COURNOT

On n'a pas attendu la première moitié du XIXe siècle pour soumettre les phénomènes économiques à la quantification et à un traitement mathématique. Les XVIIe et XVIIIe siècles voient le développement d'un corps de recherches hétérogènes qu'on peut rassembler sous l'appellation d'arithmétique politique —appellation empruntée au titre de l'ouvrage éponyme de William Petty publié en 1690—, qu'on peut considérer comme la préhistoire de l'économie mathématisée, de la démographie et de la statistique.

Il s'agit d'un ensemble de méthodes, répondant à la volonté de rationaliser la pratique politique, méthodes permettant l'élaboration d'informations numériques précises sur la situation économique et démographique du pays, ces informations servant alors à guider l'action du pouvoir politique dans ses choix ou à la réformer[1]. Ces recherches se développent aussi bien en Angleterre qu'en France, en Suède, en Hollande, en Italie et en Allemagne. Elles profitent du développement des pratiques marchandes concrètes et des arithmétiques commerciales, comme l'a montré Jean-Claude Perrot, rappelant, dans son *Histoire intellectuelle de l'économie politique* (1992), que le développement de l'arithmétique politique est rendue possible grâce à l'abandon des chiffres romains et à la généralisation de la numérotation arabe, et par le développement de l'usage du tableau à double entrée.

L'arithmétique politique profite également des grandes enquêtes démographiques et économiques lancées depuis le XIVe siècle, et surtout à partir du XVIIe, par le pouvoir politique des États modernes en cours de construction[2]. L'arithmétique politique s'enrichira au cours du XVIIIe siècle, notamment sous l'influence de Condorcet, passant d'une entreprise de quantification des objets relevant du domaine socio-politique à une mathématique sociale probabiliste. De l'observation empiriquement collectée sur laquelle on effectue des calculs élémentaires permettant d'en donner une expression quantitative, on passera à la donnée mathématiquement élaborée, donc construite, et soumise à des traitements analytiques plus puissants.

Parallèlement à cet embryon de statistique, on assiste à une autre forme d'utilisation des instruments mathématiques dans le champ de l'économie. Il s'agit d'une application du calcul algébrique aux questions économiques, qui est effectuée par Nicolas-François Canard dans ses *Principes d'économie politique*[3] de1801. Cournot porte sur le travail de Canard un jugement très sévère :

---

[1] Une évolution se dessine au cours du XVIIIe siècle. Alors qu'ils sont d'abord mis au service du pouvoir en place, les travaux d'arithmétique politique vont progressivement servir aussi à promouvoir des réformes.

[2] *Cf.* ESMONIN, E. (1964). *Études sur la France des XVIIe et XVIIIe siècles*, Paris : P.U.F.

[3] CANARD (NICOLAS-FRANÇOIS) (1801). *Principes d'économie politique*, Paris : Buisson ; réédition *in* Nicolas-François Canard, *Œuvres économiques*, Th. Martin ed., Genève : Slatkine Érudition, 2015.

“Ces prétendus principes sont si radicalement faux, et l’application en est tellement erronée, que le suffrage d’un corps éminent[4] n’a pu préserver l’ouvrage de l’oubli. On conçoit aisément que des essais de cette nature n’aient pas réconcilié avec l’algèbre des économistes tels que Say et Ricardo”[5].

Et le jugement de Joseph Bertrand n’est pas plus généreux ; il note que “le citoyen Canard, quoique professeur de mathématiques, ignore ou oublie les éléments du calcul des fonctions”[6].

Quelle que soit la portée scientifique de l’œuvre de Canard, il faut remarquer que le projet de mathématisation de l’économie élaboré par Cournot est beaucoup plus ambitieux ; il ne se réduit pas à de simples calculs arithmétiques, ni à transcrire des raisonnements économiques à l’aide de formules algébriques. Cournot met en œuvre une méthode hypothético-déductive permettant d’élaborer des modèles de marché (monopole, duopole, concurrence “indéfinie”[7]). Et ces modèles font l’objet d’un traitement analytique :

“Je me propose d’établir dans cet essai que la solution des questions générales auxquelles donne lieu la théorie des richesses, dépend essentiellement, non pas de l’algèbre élémentaire, mais de cette branche de l’analyse qui a pour objet des fonctions arbitraires, assujetties seulement à satisfaire à certaines conditions. Comme il ne s’agit que de conditions fort simples, les premières notions de calcul différentiel et intégral suffisent pour l’intelligence de ce petit traité”[8].

C’est justement par ce changement de méthode et cette orientation vers ce qu’on appelle aujourd’hui la modélisation, que l’œuvre de Cournot est fondatrice de l’économie mathématique. Ainsi que l’établit Ludovic Ragni[9], l’originalité de Cournot en 1838 n’est pas seulement d’appliquer les mathématiques au champ de l’économie, mais de proposer une typologie de modèles économiques mathématisés en faisant varier les hypothèses de départ.

Si Cournot apporte un tel soin à l’entreprise de mathématisation de l’économie, la question se pose, comme je l’ai indiqué en commençant, de comprendre la faible

---

[4] Il s’agit de la classe des sciences morales et politiques de l’Institut national des sciences et des arts (futur Institut de France) ; les *Principes d’économie politique* étant la reprise d’un mémoire de Canard qui a remporté le 1er prix au concours d’octobre 1799.

[5] Cournot (Antoine-Augustin). *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses,* Paris : Hachette, 1838 ; réédition Paris : Vrin, 1980, p. 4. (Nous désignerons les ouvrages de Cournot par le premier terme de leur titre, sauf pour leur première occurrence).

[6] BERTRAND (JOSEPH). “Compte rendu des Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses d’Augustin Cournot et de la Théorie mathématique de la richesse sociale de Léon Walras”, *Journal des savants,* Paris : Imprimerie nationale, sept. 1883, pp. 499-500.

[7] La “concurrence indéfinie” est cette forme qui mobilise un nombre indéterminé de concurrents.

[8] Cournot, *Recherches*, p. 5.

[9] RAGNI (LUDOVIC). “La méthode mathématique chez Walras et Cournot : comparaison et enjeux de discorde”, *Cahiers d’économie politique,* 2011, n° 60.

part réservée à la statistique dans son analyse économique, ce qui a pu être interprété comme un paradoxe.

2. STATISTIQUE ET ECONOMIE MATHEMATIQUE, LEUR APPARENT DIVORCE

Le paradoxe semble d'autant plus marqué que Cournot reconnaît la légitimité d'un traitement statistique et probabiliste des phénomènes économiques et sociaux. Dans l'*Exposition de la théorie des chances et des probabilités* de 1843, il affirme conjointement, et de façon très nette, l'incapacité des explications de type mécanique à rendre compte intégralement des phénomènes sociaux et la fécondité de leur traitement probabiliste et statistique :

"Les actes des êtres vivants, intelligents et moraux, écrit-il, ne s'expliquent nullement, dans l'état de nos connaissances, et nous pouvons hardiment prononcer qu'ils ne s'expliqueront jamais par la mécanique des géomètres. Ils ne tombent donc point, par le côté géométrique ou mécanique, dans le domaine des nombres; mais ils s'y retrouvent placés, en tant que les notions de combinaison et de chance, de cause et de hasard, sont supérieures dans l'ordre des abstractions à la géométrie et à la mécanique, et s'appliquent aux faits de la nature vivante, à ceux du monde intellectuel et du monde moral, comme aux phénomènes produits par les mouvements de la matière inerte"[10].

C'est dire que la théorie des probabilités jouit d'un pouvoir explicatif maximal, puisque, poursuit-il, ces notions s'appliquent :

"aux faits de la nature vivante, à ceux du monde intellectuel et du monde moral, comme aux phénomènes produits par les mouvements de la matière inerte"[11].

Et Cournot assigne, au chapitre IX de l'*Exposition*, la même universalité explicative à la statistique puisque, écrit-il :

"cette théorie s'applique aux faits de l'ordre physique et naturel, comme à ceux de l'ordre social et politique. En ce sens, des phénomènes qui s'accomplissent dans les espaces célestes peuvent être soumis aux règles et aux investigations de la statistique, comme les agitations de l'atmosphère, les perturbations de l'économie ani-

[10] COURNOT (ANTOINE-AUGUSTIN). *Exposition de la théorie des chances et des probabilités,* §45, Paris : Hachette, 1843 ; rééd. Paris : Vrin, 1984, p. 61. (Si les concepts clés de combinaison, de chance et de hasard sont jugés supérieurs aux concepts mécaniques, c'est que Cournot fait de la combinatoire le socle sur lequel s'édifie le système des mathématiques, et en conséquence la notion de combinaison, et celles qui en découlent immédiatement, comme celle de chance, jouissent d'un degré de généralité plus élevé que les concepts de la mécanique).

[11] *Exposition,* §45, p. 61.

male, et comme les faits les plus complexes encore qui naissent, dans l'état de société, du frottement des individus et des peuples"[12].

Il y a bien là une difficulté puisque la théorie économique que développe les *Recherches* fait appel non à l'analyse statistique, mais à la théorie des fonctions et au calcul infinitésimal. De plus, les applications au domaine social que Cournot envisage dans l'*Exposition* se limitent à la démographie, la théorie des assurances et les statistiques judiciaires, sans considération pour les phénomènes proprement économiques.[13] Et le discours qu'il déploie se montre très critique à l'égard des développements de la statistique :

"De nos jours, la statistique a pris un développement en quelque sorte exubérant ; et l'on n'a plus qu'à se mettre en garde contre les applications prématurées et abusives qui pourraient la discréditer pour un temps, et retarder l'époque si désirable où les données de l'expérience serviront de bases certaines à toutes les théories qui ont pour objet les diverses parties de l'organisation sociale" (*Exposition*, §103).

On pourrait donc croire que le discours de Cournot en 1838 et celui qu'il tient en 1843 sont désaccordés. Ainsi, l'économiste Claude Ménard interprète l'attitude de Cournot comme une "résistance aux statistiques", comparable à celle que manifestent au même moment Say ou Walras[14].

3. STATISTIQUE ET ECONOMIE MATHEMATIQUE, LEUR COMPLEMENTARITE

C'est cet apparent divorce qu'il faut expliquer, car on ne peut souscrire à la thèse de Claude Ménard d'une résistance aux statistiques de la part de celui qui ne cesse de revendiquer pour la statistique le statut de science mathématique.

- Il convient déjà de restituer son sens à l'apparente dénonciation de la statistique dans le passage précédent. Ce que Cournot appelle des "applications prématurées et abusives" de la statistique n'appartient pas à la statistique mathématique, mais relève de sa forme non mathématisée. Il s'agit, en effet, d'une simple "compilation de faits et de chiffres" dit Cournot15. Autrement

[12] *Ibid.*, §105, p. 125.

[13] On peut toutefois noter que les phénomènes sociaux constituent le domaine principal d'application de la statistique dans l'*Exposition*. En effet, sur les cinq chapitres que l'ouvrage consacre aux applications de la statistique, quatre concernent ce domaine (les chapitres XIII à XVI).

[14] *Cf.* CLAUDE MENARD (1977), "Trois formes de résistance aux statistiques : Say, Cournot, Walras", *Pour une histoire de la statistique*, I.N.S.E.E., Paris : Economica, pp. 417-430 ; 2[e] éd. modifiée : "Three forms of resistance to statistics : Say, Cournot, Walras", *History of Political Economy*, Durham, vol. 12, 1980, n° 4, pp. 524-541.

[15] *Ibid.*, §104, p. 124.

dit ce n'est pas à la statistique mathématique que renvoie la formule de Cournot, mais bien à la statistique descriptive telle que la conçoit Denis-François Donnant dans le "Discours préliminaire" de son *Introduction à la science de la statistique*, pour qui "la statistique n'emprunte rien à l'imagination : elle expose les faits avec simplicité sans examiner les causes"[16].

Mais plus radicalement, on peut mettre en évidence trois raisons permettant de dépasser l'apparent paradoxe :

- D'une part, la place réduite reconnue aux questions proprement économiques dans l'*Exposition* n'est en rien une particularité de la pensée de Cournot. Comme l'a montré Yves Breton[17], dans la première moitié du XIX^e siècle, la relation de la statistique à l'économie est embryonnaire et ne sera effective que dans la seconde moitié du siècle. Et, commentant l'article "Statistique" du *Dictionnaire de l'économie politique* de Joseph Garnier publié en 1852-53, Yves Breton montre que le champ d'application du calcul des probabilités se réduit, pour les économistes libéraux de la première moitié du XIX^e siècle, aux questions démographiques et celles qui y sont liées (tontines, rentes viagères et assurances)[18].
- D'autre part, le texte des *Recherches* montre clairement qu'il n'y a pas opposition, mais complémentarité entre théorie des fonctions et statistique. Cournot donne pour exemple de la coopération entre l'analyse formelle et le travail statistique, l'étude de la mortalité telle qu'elle est effectuée par Duvillard dans son ouvrage de 1796, *Analyse et Tableaux de l'influence de la petite vérole sur la mortalité à chaque âge* : alors qu'il n'est pas possible de donner *a priori* une forme algébrique à la loi de mortalité, pas plus qu'il ne l'est de construire la forme de la loi de répartition de la population aux différents âges, le mérite de Duvillard fut de montrer que ces deux fonctions sont liées par une relation algébrique simple. Et Cournot montre que la statistique peut venir seconder le modèle théorique ; il affirme en effet que, lorsque les observations statistiques auront permis de construire une table de mortalité, on pourra en déduire la table de répartition de la population aux différents âges[19].

  Il en va de même pour la "loi du débit", c'est-à-dire la loi de la demande, qui dépend de nombreuses causes multiples qui tiennent aux habitudes et à la richesse des consommateurs, causes qui ne sont pas directement mesurables. Aussi, dit Cournot, la loi ne peut être construite algébriquement, "pas plus, ajoute-t-il, que la loi de mortalité et que toutes celles dont la détermination

---

[16] DONNANT, DENIS-FRANÇOIS (1805), *Introduction à la Science de la Statistique, d'après l'allemand de Mr. de Schloetzer, avec un discours préliminaire, des additions et des remarques,* Paris : Imprimerie nationale, p. 23.

[17] YVES BRETON (1987). "Les économistes libéraux français et la statistique. Débat et controverses 1800-1914", *Journal de la société de statistique de Paris*, n° 2, 1987, pp. 79-99.

[18] *Ibid.*, p. 84.

[19] COURNOT, *Recherches*, §21, p. 38.

rentre dans le domaine de la statistique, de ce qu'on appelle également l'arithmétique sociale"[20]. Mais l'analyse permet de définir des relations déterminées qui s'établissent entre des quantités, alors même que l'on n'a pas les moyens de leur assigner de valeurs numériques. On peut donc là encore envisager une coopération entre l'approche formelle et l'analyse statistique.

- Enfin, et surtout, l'analyse critique à laquelle Cournot soumet la statistique dans l'*Exposition* n'est pas l'effet d'une méfiance à l'égard de la prétention des mathématiques à rendre compte des faits sociaux. Elle répond à l'exigence de définir leurs conditions de validité, ce qui impose d'affronter les difficultés de leur application pour en mesurer la force et les limites. L'analyse à laquelle il soumet la statistique partage la même orientation que celle qu'il développe à l'égard du calcul des probabilités. Il s'efforce, dans les deux cas, de garantir leur scientificité, c'est-à-dire d'établir à la fois leur rationalité et leur validité objective, donc aussi de mettre en garde le lecteur contre les interprétations illégitimes ou abusives auxquelles peuvent donner lieu leurs applications. C'est cette perspective critique qui commande l'ensemble des analyses de Cournot dans l'*Exposition*. Cournot l'indique explicitement à propos de la statistique : il ne s'agit pas pour lui d'augmenter les résultats auxquels conduit l'usage de la statistique, mais d'en discuter et garantir la scientificité, c'est-à-dire de nous "mettre en garde contre les applications prématurées et abusives qui pourraient la discréditer pour un temps"[21].

Cette formule vise, sans doute, à s'opposer, comme on l'a vu précédemment, à une statistique seulement descriptive pour promouvoir au contraire la statistique comme science apte à dégager "l'influence des causes régulières et permanentes"[22]. Mais, il s'agit aussi et surtout, comme c'était déjà le cas lorsque Cournot envisageait les applications du calcul des probabilités, de démêler, dans les résultats statistiques, ce qui tient proprement au phénomène et ce qui provient des instruments que le statisticien lui applique, autrement dit de faire le partage entre les propriétés de l'objet lui-même et les produits de l'activité du sujet connaissant. Le but essentiel du statisticien est en effet, écrit Cournot, de "pénétrer autant que possible dans la connaissance de la chose en soi, et pour cela de dégager autant que cela se peut faire, par une discussion rationnelle, les données immédiates de l'observation, des modifications qui les affectent, en raison seulement du point de vue où se trouve placé l'observateur, et des moyens d'observation mis à sa disposition"[23].

La façon dont Cournot formule ici ses idées ne doit pas conduire à en fausser le sens : le projet d'une connaissance dont tout élément d'origine subjective serait éli-

[20] *Ibid.*, §21, p. 37.
[21] *Ibid.*, §103, p. 123.
[22] *Ibid.*
[23] *Exposition*, §106, p. 125.

miné est un idéal régulateur[24], ce qui permet d'apercevoir que l'immédiateté des données d'observation dont il s'agit ici n'est pas initiale et constitutive de l'acte de connaissance, mais visée par lui à titre d'horizon.

La difficulté méthodologique et épistémologique principale que rencontre la statistique dans ses applications, tient à la nécessaire intervention du sujet connaissant dans le choix des classifications à opérer et des critères qui les dirigent. Ces critères, précise Cournot, dépendent des hypothèses qui commandent l'analyse, lesquelles relèvent de ce qu'il appelle les "probabilités philosophiques", c'est-à-dire des jugements de probabilité, appuyés sur des analogies et des inductions, non susceptibles d'une évaluation numérique. La distribution d'une population d'éléments en catégories distinctes sur lesquelles on applique ensuite les instruments statistiques –en "coupes", écrit Cournot– est un jugement préalable extérieur au travail mathématique. Il est, dit Cournot, "un jugement conjectural, fondé lui-même sur des probabilités, mais sur des probabilités qui ne se résolvent pas dans une énumération de chances, et dont la discussion n'appartient pas proprement à la doctrine des probabilités mathématiques"[25].

Cette intervention des probabilités philosophiques dans la mise en œuvre de l'analyse statistique est incontournable, selon Cournot, dès lors que l'on se refuse à la réduire à un instrument de collectes de données, simplement accumulées et juxtaposées, pour lui reconnaître une authentique fonction de connaissance. Si la statistique permet de construire des faits scientifiquement élaborés et vérifiés, si donc, dit Cournot au §334 de l'*Essai*, elle contribue par là à construire la partie positive des "doctrines morales, politiques et économiques", ces "faits positifs" ne reçoivent leur sens que lorsqu'ils sont interprétés et reliés les uns aux autres, ce qui suppose une intervention critique de la raison[26], non seulement après coup, mais aussi en amont, pour diriger le travail du statisticien.

En définitive, ce qui importe surtout aux yeux de Cournot, c'est de faire comprendre comment doivent être interprétés les résultats statistiques, lesquels, considérés indépendamment des méthodes qui les ont rendu possibles, risquent d'engendrer la suspicion sur leur valeur objective, car, remarque-t-il, "ordinairement ces essais par lesquels l'expérimentateur a passé ne laissent pas de traces; le public ne connaît que le résultat qui a paru mériter de lui être signalé; et en conséquence, une personne étrangère au travail d'essais qui a mis ce résultat en évidence, manquera absolument de

[24] L'activité de connaissance scientifique doit plutôt être pensée, selon Cournot, comme un mouvement progressif et laborieux par lequel le savant réduit, chaque fois un peu plus mais jamais complètement, la distance qui le sépare de l'objet, f. *Essai sur les fondements de nos connaissances et sur les caractères de la critique philosophiques*, Paris : Hachette, 1851 ; réédition Vrin, 1975, ch. I, p. 5-15.

[25] *Exposition*, § 113, p. 132.

[26] Ils « ne donneraient le plus souvent, écrit-il, que des résultats confus et contradictoires, tant que la raison ne les aurait pas interprétés et ordonnés d'après certaines règles qu'elle puise en elle-même », *Essai*, §334, p. 397.

règle fixe pour parier que le résultat est ou non imputable aux anomalies du hasard"[27]. Il s'agit donc moins, pour Cournot, de contester la possibilité pour la statistique de contribuer à l'intelligibilité des phénomènes économiques et sociaux, que de mettre à jour les conditions, partant aussi les limites, qui en garantissent la validité.

4. CONCLUSION

Les *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses* et l'*Exposition de la théorie des chances et des probabilités* n'ont ni le même objet, ni le même objectif. Ainsi que l'a montré Ludovic Ragni, les *Recherches* de 1838 ne disent pas le vrai, elles ne se proposent pas d'expliquer la réalité du système économique conforme à la nature des choses, mais elles présentent une série de modèles permettant de décrire des situations différentes du marché. C'est là une démarche et un objectif différents de ceux de la statistique dont la fonction est d'atteindre, *autant que faire se peut,* la raison des choses par une démarche étiologique. L'analyse statistique n'est tout simplement pas accordée au projet théorique qui anime les *Recherches*, lequel exige effectivement la mise en œuvre d'une méthode hypothético-déductive. Mais il n'y a nulle contradiction entre ces deux orientations, nul renoncement de la part de Cournot à l'économie comme science mathématisée après 1838 et nulle résistance aux statistiques. L'ouvrage de 1838 et celui de 1843 mettent en œuvre des méthodes différentes appropriées aux objectifs différents poursuivis par Cournot.

BIBLIOGRAPHIE

BERTRAND (JOSEPH). Compte rendu des *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses* d'Augustin Cournot et de la *Théorie mathématique de la richesse sociale* de Léon Walras, *Journal des savants*, Paris : Imprimerie nationale, sept. 1883, pp. 499-500.

BRETON (YVES). "Les économistes libéraux français et la statistique. Débat et controverses 1800-1914", *Journal de la société de statistique de Paris,* n° 2, 1987, pp. 79-99.

CANARD (NICOLAS-FRANÇOIS). *Principes d'économie politique*, Paris : Buisson, 1801 ; réédition *in* Nicolas-François Canard, *Œuvres économiques*, Th. Martin ed., Genève : Slatkine Érudition, 2015.

COURNOT (1E). *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses,* Paris, Hachette, 1838 ; réédition Paris, Vrin, 1980.

COURNOT (ANTOINE-AUGUSTIN). *Exposition de la théorie des chances et des probabilités*, Paris : Hachette, 1843 ; réédition Paris : Vrin, 1984.

COURNOT (ANTOINE-AUGUSTIN). *Essai sur les fondements de nos connaissances et sur les caractères de la critique philosophiques,* Paris : Hachette, 1851 ; réédition Paris : Vrin, 1975.

DONNANT (DENIS-FRANÇOIS). *Introduction à la Science de la Statistique, d'après l'allemand de Mr. de Schloetzer, avec un discours préliminaire, des additions et des remarques,* Paris : Imprimerie nationale, 1805.

[27] *Exposition*, §111, p. 130.

ESMONIN (EDMOND), *Études sur la France des xvii^e^ et xviii^e^ siècles*, Paris : P.U.F., 1964.

GRAUNT (JOHN). *Natural and Political Observations Mentioned in a Following Index and Mad Upon the Bills of Mortality*, London : J. Martin, J. Allestry and T. Dicas, 1662.

MENARD (CLAUDE). "Trois formes de résistance aux statistiques : Say, Cournot, Walras", *Pour une histoire de la statistique*, I.N.S.E.E., Paris : Economica, 1977, pp. 417-430; 2e éd. Modifiée : "Three forms of resistance to statistics : Say, Cournot, Walras", *History of Political Economy*, Durham, vol. 12, 1980, n° 4, pp. 524-541.

PERROT (JEAN-CLAUDE). *Une histoire intellectuelle de l'Economie politique. XVIIe-XVIIIe siècles*, Paris : Ed. EHESS, 1992.

PETTY (WILLIAM). *Political Arithmetic*, *London*, Printed for *Robert Clavel* at the *Peacock*, and *Hen Mortlock at* the *Phoenix in St. Paul's* Church-yard, 1690.

RAGNI (LUDOVIC). "La méthode mathématique chez Walras et Cournot : comparaison et enjeux de discorde", *Cahiers d'économie politique*, 2011, n° 60.

CAPÍTULO 15

ESTADÍSTICA, MORTALIDAD Y DIVINIDAD EN EL S. XVIII. LOS ESTUDIOS DE DÉPARCIEUX Y SUSSMILCH

SONIA DE PAZ COBO
Universidad Rey Juan Carlos

JUAN MANUEL LÓPEZ ZAFRA
Colegio Universitario de Estudios Financieros

1. INTRODUCCIÓN

Durante los s. XVI y XVII se produjeron algunos acontecimientos que dieron lugar a lo que hoy conocemos como estadística. Así, en la primera mitad del 1700 el profesor de Gotinga Godofredo Achenwall publica su "Elementos de Estadística de los principales Estados de Europa" y también los "Principios de Economía Política". El primero de ellos da lugar por vez primera a la palabra estadística en el sentido que los ingleses emplearon el de “aritmética política”, esto es, la ciencia del estado. Previamente, sólo en el XVI la media aritmética se había generalizado a más de dos valores, posiblemente gracias a la aparición del sistema decimal de Stevin en el 1585. Pero en relación a las obras y autores que nos ocupan en el presente trabajo no podemos menos que recordar a John Graunt y su *Natural and Political Observations Made upon the Bills of Mortality*, quien a través de registros parroquiales estimó la población de Londres en 1662; este método sirvió a Laplace para estimar de forma similar la población de Francia alrededor de 1800. Christian Huygens en 1669 le resuelve por carta un problema a su hermano Lodewijk, definiendo a partir de las tablas de Graunt el concepto actuarial de esperanza de vida de una forma sencilla y elegante: si de 100 individuos nacidos a la edad de 6 años sólo viven 64, el resto (36) vivirá una media de 3 años; de los 6 a los 16 mueren 24, de forma que su edad media será de 11 años, de forma que, actuando de esa manera para todos los rangos de edad planteados por Graunt, la edad media de la población sería de $\frac{36\times3+24\times11+\cdots}{100}=18{,}22$ años ; cierto es que el primero ya se había mostrado particularmente interesado en la teoría de la probabilidad al publicar, en 1657, el tratado *De ratiociniis in ludo aleae*, en el que ya planteaba claramente el concepto de esperanza matemática. Leibniz alrededor de 1680 estableció el mismo concepto de vida media o esperanza de vida, sin haber tenido acceso a la correspondencia entre los hermanos Huygens. Por supuesto no podemos olvidar el *Ars Conjectandi* de J. Bernouilli (editado de forma póstuma en 1713) ni *The doctrine of chances* de Abraham de Moivre, publicado en 1718. En 1749 nace Pierre Simon, posterior marqués de Laplace, quien publica en 1812 su *Théorie analytique des probabilités* en el que desarrolla el método de los mínimos cuadrados, el teorema del límite central y las funciones generatrices de momentos, y en el que, en su dedicatoria a Napoleón, señala que "*Ce calcul délicat s'étend aux questions les plus importantes de la vie, qui ne sont en effet, que des problèmes de probabilité*". Quién sabe si, de haber leído el texto a tiempo y haber interpretado correctamente la concepción de incertidumbre del normando, la guerra de Rusia que desarrollaba el emperador en el momento de la publicación del texto hubiese tenido lugar.

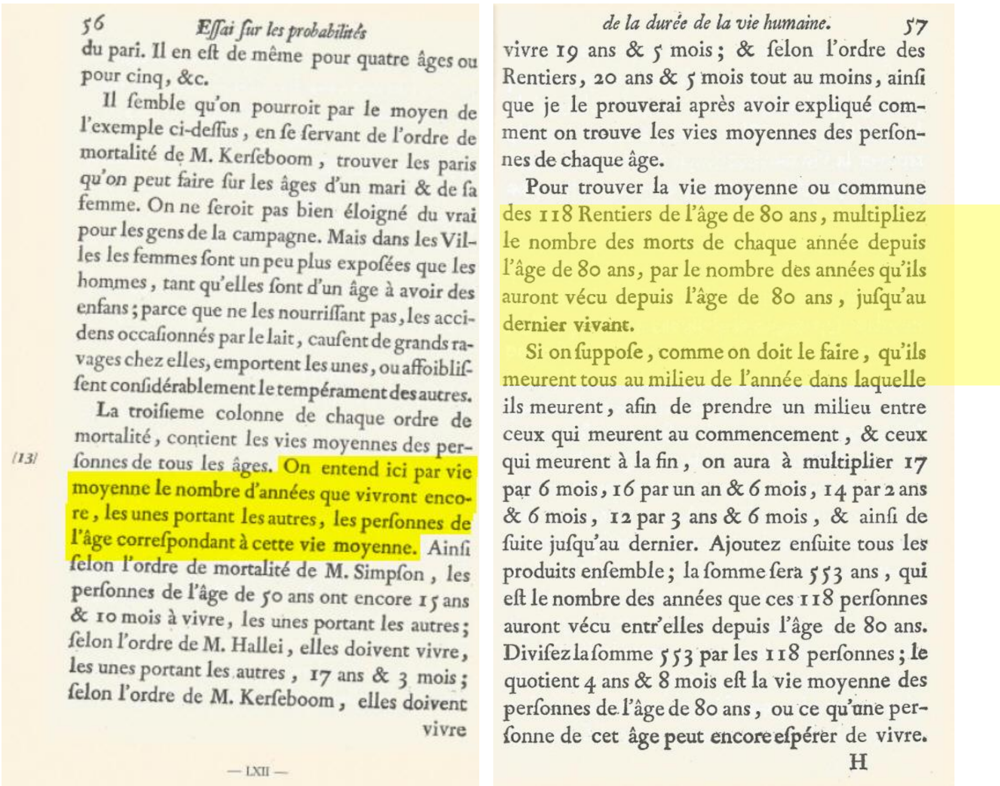
Esa es la época ilustrada en la que nacen y consiguen estudiar los autores de los que aquí nos ocupamos. Antoine Déparcieux nació en 1703 en el seno de una familia muy humilde de agricultores cerca de Nîmes, en el sur de Francia. Posiblemente becado estudió primero en los jesuitas de Alés para posteriormente acudir a París a proseguir sus estudios en matemáticas, también con asistencia financiera privada que resultó insuficiente pues tuvo que trabajar para costearse sus estudios. En 1746 publica la que sería su principal obra, «Tratado sobre las probabilidades de la duración de la vida humana» por encargo del intendente de finanzas de Luis XV, en el que recorre anualidades, tontinas, rentas vitalicias y construye las tablas de mortalidad que fueron empleadas por las aseguradoras francesas hasta el s. XX; para muchos suponen el nacimiento de la ciencia actuarial. De acuerdo con Johnson y Kotz (1997), posiblemente fuese la publicación en 1746 de su "Essai sur les probabilités de la durée de la vie humaine" la que motivase su ingreso en la Real Academia de las Ciencias de París ese mismo año.

Coetáneo aunque residente lejos del anterior, el prusiano Johann Peter Sussmilch nació cerca de Berlín en 1707. Fue ministro de la iglesia, y ejerció en Berlín. Tras estudiar medicina, enfocó su carrera al derecho, influido por sus padres y mentores pietistas. Publica en 1741 «El Orden Divino en los cambios de la especie humana, como lo demuestra su nacimiento, muerte y propagación». Seguidor de la teología natural, en esa línea el tratado pretende transmitir la existencia de Dios sin necesidad de revelaciones (teología revelada) o experiencias religiosas (cosmogonía). En la edición de 1762 de su "Orden Divino" Sussmilch cita a Déparcieux en los siguientes términos:

"Los sabios de Inglaterra y de Francia también han sido celosos de ello. En 1746 M. Déparcieux publicó su ensayo en el que encontramos junto casi todo lo que se refiere a este tema. (…) Ambos, M. Déparcieux y M. Hogdson, han, breve y claramente, indicado cómo determinar las rentas vitalicias”.

El “Ensayo sobre las probabilidades de la duración de la vida humana” de A. Déparcieux.

La principal característica de la obra de Déparcieux es el hecho de constituir un auténtico manual de matemática financiera y actuarial. Así, define el concepto de vida media como “el número de años que vivirán aún (…) las personas de la edad a las que corresponde tal vida media”, tal y como podemos ver en la p. 56 representada en la figura 1. La característica de “manual” del libro se parecía perfectamente en la posterior p. 57, en la que pone un ejemplo para determinar la vida media de los 118 rentistas de 80 años, por el que “multiplique el número de muertos de cada año a partir de la edad de 80 por el número de años que habrán vivido desde la edad de 80 hasta el último vivo”.



56 *Eſſai ſur les probabilités*

du pari. Il en eſt de même pour quatre âges ou pour cinq, &c.

Il ſemble qu'on pourroit par le moyen de l'exemple ci-deſſus, en ſe ſervant de l'ordre de mortalité de M. Kerſeboom, trouver les paris qu'on peut faire ſur les âges d'un mari & de ſa femme. On ne ſeroit pas bien éloigné du vrai pour les gens de la campagne. Mais dans les Villes les femmes ſont un peu plus expoſées que les hommes, tant qu'elles ſont d'un âge à avoir des enfans; parce que ne les nourriſſant pas, les accidens occaſionnés par le lait, cauſent de grands ravages chez elles, emportent les unes, ou affoibliſſent conſidérablement le tempérament des autres.

La troiſieme colonne de chaque ordre de mortalité, contient les vies moyennes des per-
[13] ſonnes de tous les âges. On entend ici par vie moyenne le nombre d'années que vivront encore, les unes portant les autres, les perſonnes de l'âge correſpondant à cette vie moyenne. Ainſi ſelon l'ordre de mortalité de M. Simpſon, les perſonnes de l'âge de 50 ans ont encore 15 ans & 10 mois à vivre, les unes portant les autres; ſelon l'ordre de M. Hallei, elles doivent vivre, les unes portant les autres, 17 ans & 3 mois; ſelon l'ordre de M. Kerſeboom, elles doivent vivre

— LXII —

de la durée de la vie humaine. 57

vivre 19 ans & 5 mois; & ſelon l'ordre des Rentiers, 20 ans & 5 mois tout au moins, ainſi que je le prouverai après avoir expliqué comment on trouve les vies moyennes des perſonnes de chaque âge.

Pour trouver la vie moyenne ou commune des 118 Rentiers de l'âge de 80 ans, multipliez le nombre des morts de chaque année depuis l'âge de 80 ans, par le nombre des années qu'ils auront vécu depuis l'âge de 80 ans, juſqu'au dernier vivant.

Si on ſuppoſe, comme on doit le faire, qu'ils meurent tous au milieu de l'année dans laquelle ils meurent, afin de prendre un milieu entre ceux qui meurent au commencement, & ceux qui meurent à la fin, on aura à multiplier 17 par 6 mois, 16 par un an & 6 mois, 14 par 2 ans & 6 mois, 12 par 3 ans & 6 mois, & ainſi de ſuite juſqu'au dernier. Ajoutez enſuite tous les produits enſemble; la ſomme ſera 553 ans, qui eſt le nombre des années que ces 118 perſonnes auront vécu entr'elles depuis l'âge de 80 ans. Diviſez la ſomme 553 par les 118 perſonnes; le quotient 4 ans & 8 mois eſt la vie moyenne des perſonnes de l'âge de 80 ans, ou ce qu'une perſonne de cet âge peut encore eſpérer de vivre.

H

Figura 1

Asimismo, resultan muy interesantes a la par que didácticas las tablas que aparecen en la pág. xvj, y que reproducimos en parte por su interés en la figura 2. Como puede observarse, se trata de un resumen de distintas tablas y en ella el autor efectúa una relación de las distintas probabilidades que tienen los individuos de edad *x* de morir antes de alcanzar la edad siguiente, *x*+1, y que hoy denotamos con el símbolo de conmutación $_{x+1}q_x$. De esta forma, se observa cómo la mortalidad decrece de forma paulatina hasta los 12 años, manteniéndose constante y alrededor de 0,05 para edades entre los 22 y los 42 años y un crecimiento también paulatino a partir de esa edad. Por ejemplo, con 77 el cociente de mortalidad es de 0,5 y con 87 alcanza ya el valor de 0,86.

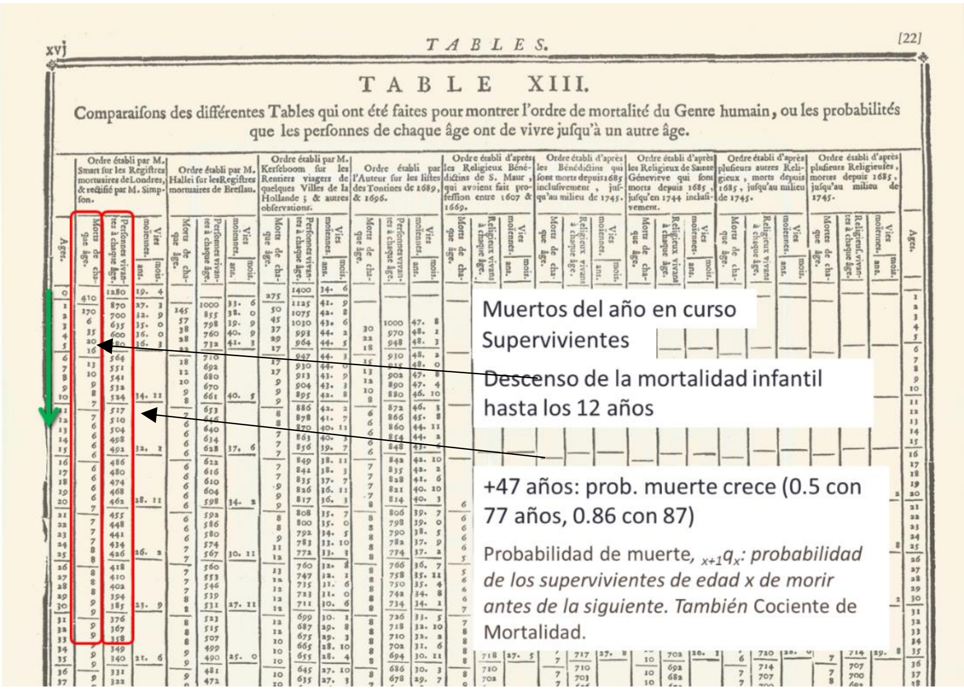
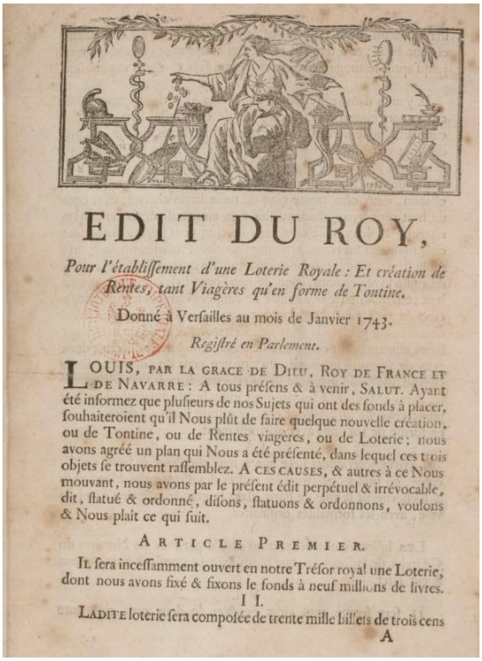


Figura 2. Tabla XIII, con la Comparación de las distintas Tablas que se han construido para mostrar la mortalidad del género humano, o las probabilidades de que las personas de cada edad tienen de vivir hasta otra edad. Muertos del año en curso (col. 2) y progresivo descenso de la mortalidad infantil hasta los 12 años (col. 3).

Como mostramos en la figura 3, la relevancia de estas operaciones en la época era grande.



EDIT DU ROY,

Pour l'établiſſement d'une Loterie Royale : Et création de Rentes, tant Viagères qu'en forme de Tontine.

Donné à Verſailles au mois de Janvier 1743.

Regiſtré en Parlement.

LOUIS, PAR LA GRACE DE DIEU, ROY DE FRANCE ET DE NAVARRE : A tous préſens & à venir, SALUT. Ayant été informez que pluſieurs de nos Sujets qui ont des fonds à placer, ſouhaiteroient qu'il Nous plût de faire quelque nouvelle création, ou de Tontine, ou de Rentes viagères, ou de Loterie ; nous avons agréé un plan qui Nous a été préſenté, dans lequel ces trois objets ſe trouvent raſſemblez. A CES CAUSES, & autres à ce Nous mouvant, nous avons par le préſent édit perpétuel & irrévocable, dit, ſtatué & ordonné, diſons, ſtatuons & ordonnons, voulons & Nous plaît ce qui ſuit.

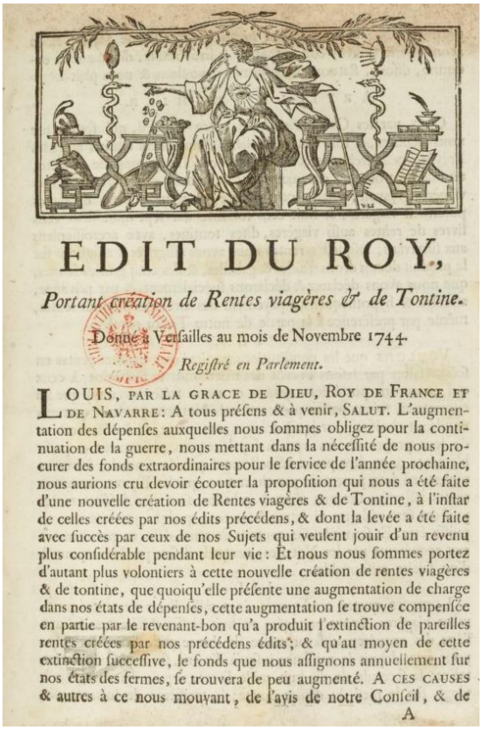
ARTICLE PREMIER.

IL ſera inceſſamment ouvert en notre Tréſor royal une Loterie, dont nous avons fixé & fixons le fonds à neuf millions de livres.

I I.

LADITE loterie ſera compoſée de trente mille billets de trois cens

A



EDIT DU ROY,

Portant création de Rentes viagères & de Tontine.

Donné à Verſailles au mois de Novembre 1744.

Regiſtré en Parlement.

LOUIS, PAR LA GRACE DE DIEU, ROY DE FRANCE ET DE NAVARRE : A tous préſens & à venir, SALUT. L'augmentation des dépenſes auxquelles nous ſommes obligez pour la continuation de la guerre, nous mettant dans la néceſſité de nous procurer des fonds extraordinaires pour le ſervice de l'année prochaine, nous aurions cru devoir écouter la propoſition qui nous a été faite d'une nouvelle création de Rentes viagères & de Tontine, à l'inſtar de celles créées par nos édits précédens, & dont la levée a été faite avec ſuccès par ceux de nos Sujets qui veulent jouir d'un revenu plus conſidérable pendant leur vie : Et nous nous ſommes portez d'autant plus volontiers à cette nouvelle création de rentes viagères & de tontine, que quoiqu'elle préſente une augmentation de charge dans nos états de dépenſes, cette augmentation ſe trouve compenſée en partie par le revenant-bon qu'a produit l'extinction de pareilles rentes créées par nos précédens édits ; & qu'au moyen de cette extinction ſucceſſive, le fonds que nous aſſignons annuellement ſur nos états des fermes, ſe trouvera de peu augmenté. A CES CAUSES & autres à ce nous mouvant, de l'avis de notre Conſeil, & de

A

Figura 3. Edictos de Luis XV de 1743 y 1744 para la creación de rentas vitalicias y tontinas.

Nada antes de la aparición del «Ensayo sobre las probabilidades…» anticipaba el interés de Déparcieux por las rentas y los seguros. La obra se divide en tres partes totalmente independientes. «De las rentas a término o anualidades»; «Ensayo sobre las probabilidades de la duración de la vida humana»; y «Sobre las rentas vitalicias». La parte central de la obra debió escribirse necesariamente entre enero de 1743 y mayo de 1745, dadas las alusiones a la obra de Simpson en las que corrige los cálculos de Halley sobre la mortalidad en Breslau para aplicarlos a Londres, y que no fue publicada hasta 1742.

La aportación de Déparcieux proviene del empleo de datos longitudinales de la edad de muerte. A partir de ellos, el autor calcula las probabilidades de muerte por edad, descubriendo (como Wargentin) diferencias importantes en la mortalidad de hombres y mujeres. Establece las primeras tablas francesas de mortalidad con separación de hombres y mujeres.

Para la adenda de 1760 Wargentin le comunica la edad de muerte de 100.000 suecos, 49.326 hombres y 50.764 mujeres, que le permite al francés deducir la tabla de mortalidad sueca.

Establece los conceptos de vida media o esperanza de vida, tras Huygens (en 1669) y Leibniz (hacia 1680); lo curioso es que no podía conocer los trabajos de sus antecesores pues no fueron publicados hasta el s. XIX.

Establece dos formas para el cálculo de la vida media. La primera, como hemos señalado, supone que «para hallar la vida media o común de 118 rentistas de 8 años de edad, multiplique el número de muertos de cada año desde la edad de 80 por el número de años que habrán vivido desde la edad de 80 hasta el último superviviente».

Técnicamente y desde una perspectiva actuarial, lo que el autor plantea es

$$e_x = \frac{\sum_{t=1}^{n} D_t \times dur_t}{S_x}$$

siendo

e_x la esperanza de vida a la edad x

D_t el número de fallecidos del año k

dur_t el número de años posteriores incluida la de muerte –0.5

S_x el número de supervivientes de la edad x

Sin embargo, aparece un problema, que no es otro que el cálculo del numerador, esto es, la suma ponderada, que aparecerá tantas veces como años a tener en cuenta (94 para Déparcieux).

Por ello establece una segunda forma para el cálculo de la vida media, a partir de la siguiente consigna: «Añada todas las personas que quedan cada año, comprendidas desde el que quiere usted calcular la vida media hasta el último superviviente».

Técnicamente, lo que el autor plantea ahora es obtener

$$e_x = \frac{(S_x + S_{x+1} + S_{x+2} + \cdots + S_{x+n}}{S_x} - 0,5$$

Este método permite por vez primera comparar tablas de mortalidad de distintos países o colectivos.

2. EL ORDEN DIVINO DE SUSSMILCH

Toda la obra de Sussmilch supone un elogio a la obra de Dios en la tierra. Tal y como el autor lo plantea, los designios de Dios se cumplen entre todos los animales de la tierra y en particular en el hombre, su creación más querida. Su principal reto es responder a la pregunta del tiempo que tarda una población en duplicar sus efectivos. Para ello, estudia múltiples registros y establece como proporción normal en el S. XVIII la de un muerto anual por cada 31 vivos. Esto supone que, para una población de 100.000 personas, la proporción sería de 15 nacimientos por cada 10 muertes, estableciéndose un excedente de 1388 efectivos anuales, lo que llevaría a una duplicación de la población cada 50 años.

Los períodos de duplicación se modifican en virtud de ese excedente, que es función de la proporción de nacimientos sobre muertes, dando lugar a 250 años si el excedente es de 1 de cada 10 mientras que sería de sólo 13 años cuando la cifra de nacimientos triplicase a la de muertes. Alcanza entonces una conclusión nada extraordinaria para la época: la del crecimiento geométrico de la población. (Otros, como Liebniz, habían planteado el decrecimiento uniforme, como Graunt o de Witt – aunque sólo en los primeros años de vida). Señala Sussmilch los obstáculos al crecimiento de la población como la peste, la guerra, la hambruna, el celibato o la fecundidad, y plantea la necesidad de luchar contra los obstáculos artificiales para lograr que la población aumente.

El orden divino, de acuerdo con Sussmilch, se manifiesta en la demografía en el excedente general de los nacimientos sobre los fallecimientos, o en la constante universal del excedente de nacimientos masculinos sobre los femeninos. Como señala Rohrbasser, siendo experimental el método de Sussmilch no busca sin embargo demostrar la existencia de Dios, que es una realidad metafísica establecida a priori. Esta consideración es muy importante pues supone una cuestión muy importante en el pensamiento científico, aunque ni novedosa ni única: el hecho de no necesitar demostrar en cada paso la existencia de Dios sino de confirmarla en cada gesto de su creación, de acuerdo con el planteamiento del autor.

Surge, como siempre, el problema de las situaciones no previstas por el modelo. Para explicar el pretendido azar que regiría ciertos comportamientos, Sussmilch recurre al argumento del plan secreto de Dios, por el que los individuos carecemos de información sobre todos sus designios y decisiones, y sólo podemos tratar de descubrir sus grandes leyes, a la manera de Newton, y tener una enorme confianza en la acción de la providencia, a la manera de Leibniz.

Esta obra tuvo repercusión mucho más allá de la demografía al suponer un cantar a la alegría «divina» de la reproducción humana.

Como podemos apreciar, las relaciones con la obra de Thomas Malthus son bastante evidentes.

De la importancia de la obra de Sussmilch da prueba el hecho de que el INED tiene dos ediciones facsímiles, la de 1979 dirigida por Mme Hecht y la de 1998 dirigida por M. Rohrbasser.

3. CONCLUSIÓN

Como hemos señalado a lo largo de las páginas anteriores, estamos ante lo que podíamos decir sin temor a equivocarnos dos autores de una enorme relevancia para el estudio de la nuestra disciplina.

Sussmilch no hace ninguna aportación relevante al estudio de la mortalidad más allá de las tablas, que le hacen sin duda ganarse el respeto de sus coétaneos; Déparcieux, en cambio, establece el concepto de esperanza de vida después de Huygens y Leibniz pero sin saber que éstos lo habían deducido.

BIBLIOGRAFÍA

DEPARCIEUX, A. (1746). *Essai sur les probabilités de la durée de la vie humaine*. Edición facsímil del INEP (París). 2003, París.

HEYDE, C.C.; SENETA, E. (eds.) (2001). *Statisticians of the centuries*. Springer, New York.

JOHNSON, N.; KOTZ, S. (eds.) (1997). *Leading personalities in statistical science: from the 17th century to the present*. John Wiley and Sons, EE.UU.

PÉREZ DE LABORDA, A. (1983). *¿Salvar lo real? Materiales para una filosofía de la ciencia*. Ediciones Encuentro, Madrid.

SUSSMILCH, J.P. (1741). *L'ordre divin dans les changements de l'espèce humaine, démontré par la naissance, la mort et la propagation de cell-ci*. Edición del INEP (París) traducida y anotada por Marc Rohrbasser. 1998, París.

CAPÍTULO 16

MUSIC AND COMBINATORICS IN THE 17TH CENTURY

EBERHARD KNOBLOCH
Berlin University of Technology

1. INTRODUCTION

The authors of the seventeenth century cited again and again the biblical verse (*Wisdom* 11,20): *Sed omnia in mensura, et numero, et pondere disposuisti*. (But you have ordered everything, according to measure and number and weight.)

In other words, God was the first mathematician when he created the word. The situation is illustrated by the *Bible moralisée* of the thirteenth century kept in the Austrian National Library[1]:

God is measuring the world with a pair of compasses. The variety of harmony stems from the composition, combination, and arrangement of its parts. They constitute the universal harmony. Thus God was not only the first mathematician, he was also the first combinatorialist.

This applied especially to music: *to compose* was equivalent with *to combine, to arrange.* Lullism and its combinatorial art founded by the medieval thinker Ramón Llull were extremely influential in this respect. They aimed at:

- *musical education*: even ignorants should be able to learn and to practice music within one hour;
- *Christianization*: this approach helped to address and to convert the infidels;
- *God's glorification*: God was the first combinatorialist when He created the world;

[1] Austrian National Library Vienna cod. 2554, fol. 1v.

- *creativity*: men must imitate God, in order to be creative. This especially applies to music;
- *optimization*: a song can be optimized on condition that the number of songs is not too great. Their beauty consists in their variety. This variety is demonstrated by an explicit enumeration. Every possibility is evaluated, according to certain musical principles.

Illustration 1
God is measuring the world with a pair of compasses
(*Fuente*: Bible moralisée, 13th c., Austrian National Library Vienna cod. 2554, f. 1v)

In other words, we have a strong religious motivation to do mathematics or —in order to be more precise— to do music. Two Lullistic authors of that kind of the 17th century were Marin Mersenne and Athanasius Kircher. But even later authors were still influenced by such ways of thinking. Hence I would like to speak about the following three main issues:

1. Marin Mersenne: His works and the Lullistic, religious, musical tradition
   1.1 Permutations
   1.2 Arrangements as a generalization of permutations
   1.3 Combinations
2. Athanasius Kircher : His *Universal musical art* 1650
   2.1 The 8th book
   2.2 Its four parts
3. Gottfried Wilhelm Leibniz 1666 – Jakob Bernoulli 1692

1.1. Marin Mersenne: His works and the Lullistic, religious, musical tradition

For Mersenne, the combinatorial art was a fundamental, universal, general art. His combinatorial studies were set out in six publications:

- *Quaestiones celeberrimae in Genesim* (1623)
- *La vérité des sciences* (1625)
- *Harmonicorum libri* (1635 and 1636)
- *Harmonie universelle* (1636)
- *Cogitata physico-mathematica* (1644)
- *Novae observationes physico-mathematicae* (1647)

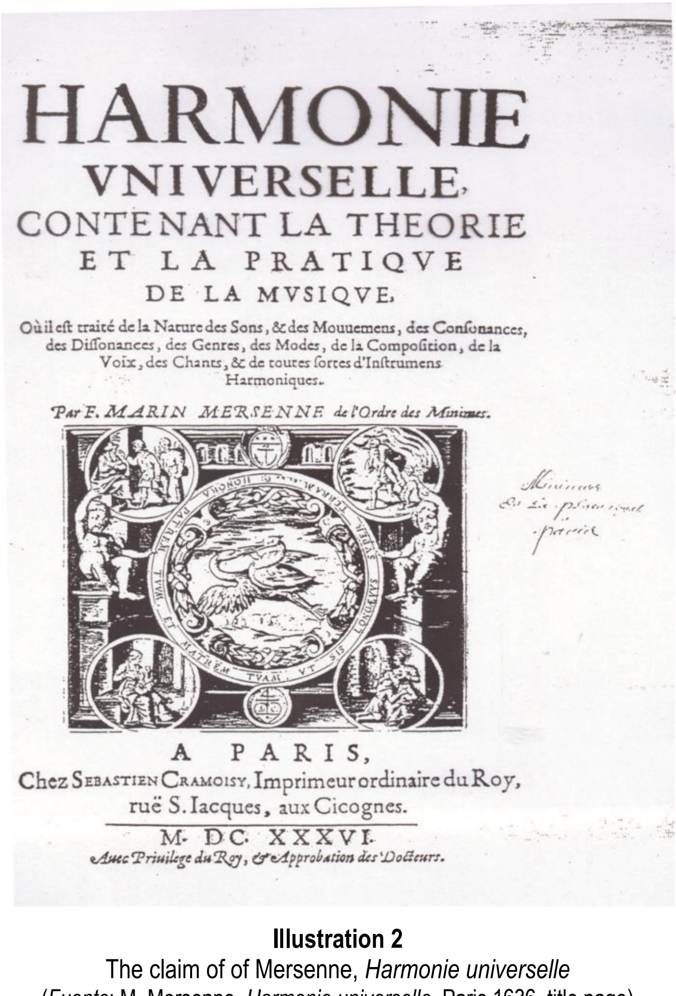
The first book concerns theology, the second philosophy of science, especially of mathematics, the next two deal with music theory, the last two with natural science and mathematics. By and large, combinatorial contributions of the first two publications repeat Christoph Clavius's results (Clavius 1611, 17-19) without mentioning their source. The last two publications contain only some additional remarks with regard to the two music-theoretical books, which comprehend Mersenne's most important contributions to combinatorics.

Hence we have to concentrate on these two voluminous monographs. The complete title of the Latin written work reads as follows (Mersenne 1635/36, title page):

Books about harmony dealing with the nature, causes and effects of the notes, with the consonances, dissonances, proportions, keys, modes, songs, composition and harmonical instruments of the whole world. Dedicated to Henry Montmort. A *book useful for grammarians, orators, philosophers, legal advisers, physicians, mathematicians and theologians.*

Mersenne cited psalm 150: *Laudate eum in cymbalis benesonantibus, laudate eum in cymbalis iubilationis. Omnis spiritus laudet Dominum.* (Praise God with cymbals pleasing to the ear, praise Him with jubilant cymbals, every spirit should praise the Lord.)

The French written work has a similar title (Mersenne 1636, title page):



HARMONIE VNIVERSELLE, CONTENANT LA THEORIE ET LA PRATIQVE DE LA MVSIQVE,
Où il est traité de la Nature des Sons, & des Mouuemens, des Consonances, des Dissonances, des Genres, des Modes, de la Composition, de la Voix, des Chants, & de toutes sortes d'Instrumens Harmoniques.
Par F. MARIN MERSENNE de l'Ordre des Minimes.
A PARIS,
Chez SEBASTIEN CRAMOISY, Imprimeur ordinaire du Roy, ruë S. Iacques, aux Cicognes.
M. DC. XXXVI.
Auec Priuilege du Roy, & Approbation des Docteurs.

Illustration 2
The claim of of Mersenne, *Harmonie universelle*
(*Fuente*: M. Mersenne, *Harmonie universelle*, Paris 1636, title page)

Universal harmony containing the theory and practice of music dealing wih the nature of tones and of motions, of consonances, of dissonances, of keys, modes, composition, voice, of songs and of all sorts of harmonic instruments.

The emblem of the title page consists of four pictures illustrating the Fourth Commandment: We have to honour our parents in order to live a long time. At the upper left the emblem shows the son of Tobias healing his father by means of a fish. At the upper right one can see Aeneas leaving the burning Troja with his father Anchises on his shoulders and his son at his hand. At the lower left it is illustrated that Ruth does not leave her mother-in-law, Naemi, after the death of her husband, the father-in-law. At the lower right of the illustration Pero feeds her father Cimon (Mycon) in prison with her milk. The religious context is essential.

The second title page illustrates the wonderful effect of music: Orpheus is playing the lyre of six strings:

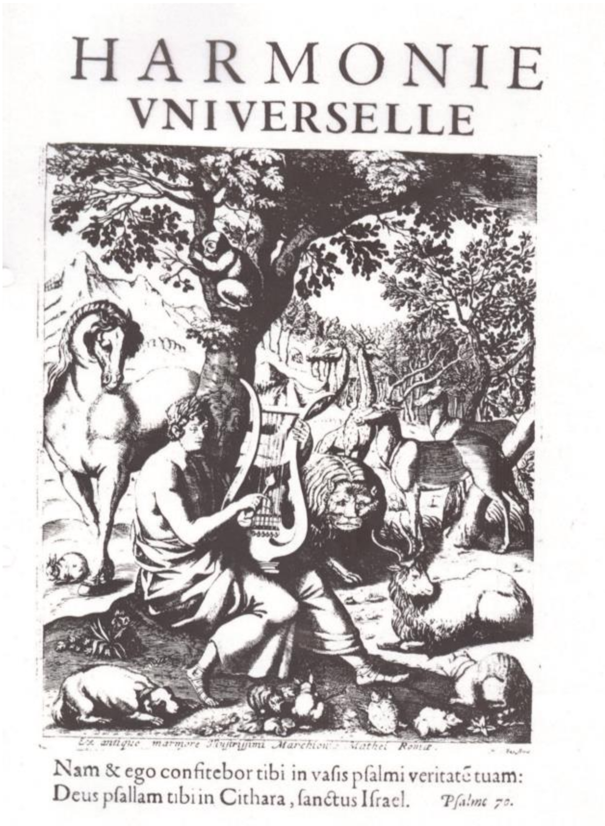


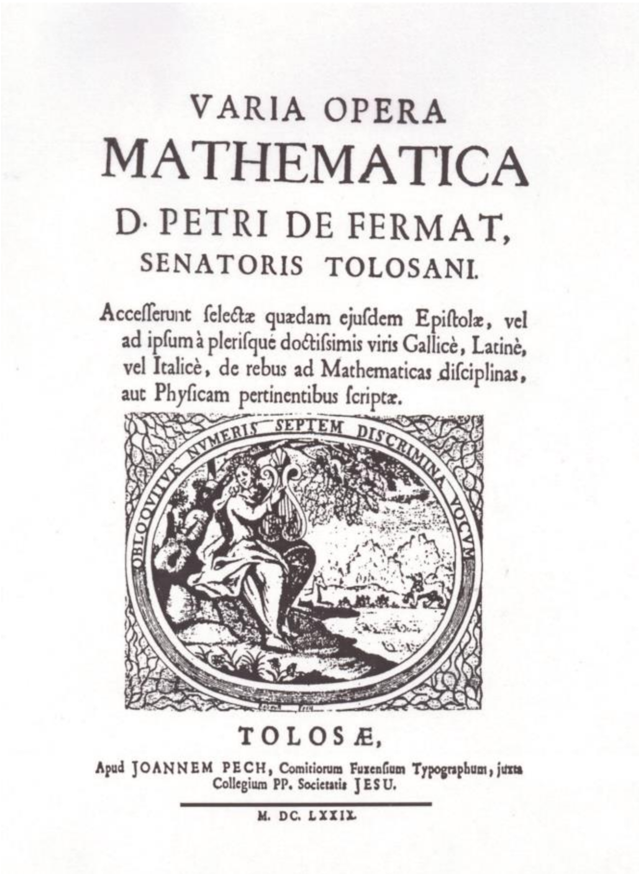
Illustration 3
Orpheus is singing and playing the lyre of six strings (Mersenne)
(*Fuente*: M. Mersenne, *Harmonie universelle*, Paris 1636, second title page)

The wild animals are attentively listening to the music: The ape on the tree, the horse, the giraffe, the lion, the stag etc. Again Mersenne cites a psalm (psalm 71, verse 22f.):

Nam et ego confitebor tibi in vasis psalmi veritatem tuam:
Deus psallam tibi in Cithara, sanctus Israel.

(For I, too, shall avow to you, God your truth by means of a psalm,
I shall sing for you, God, and play the lyre, saint in Israel.)

It is worth mentioning that we find the same situation on the title page of Fermat's *Various mathematical works* (Fermat 1679).


VARIA OPERA
MATHEMATICA
D. PETRI DE FERMAT,
SENATORIS TOLOSANI.

Acceſſerunt ſelectæ quædam ejuſdem Epiſtolæ, vel ad ipſum à pleriſque doctiſsimis viris Gallicè, Latinè, vel Italicè, de rebus ad Mathematicas diſciplinas, aut Phyſicam pertinentibus ſcriptæ.

TOLOSÆ,
Apud JOANNEM PECH, Comitiorum Fuxenſium Typographum, juxta Collegium PP. Societatis JESU.

M. DC. LXXIX.

Illustration 4
Orpheus is singing and playing the lyre of seven strings (Fermat)
(*Fuente*: P. d. Fermat, *Varia opera mathematica*, Toulouse 1679, title page)

This time Virgil's *Aeneid* is cited (book VI, vers 646):

Obloquitur numeris septem discrimina vocum.

(He (Orpheus) accompanies the melodies on the lyre of seven strings.)

Mersenne considered counting problems, that is, a number of different arrangements or collections of objects of a particular kind: permutations; combinations or unordered selections; arrangements or ordered selections.

1.2. Permutations

The number of permutations without repetition $P(n, n)$ is calculated by means of the recursion rule:

$$P(n, n) = n \cdot P(n, n - 1) = n \cdot (n - 1)! = n!$$

Mersenne continued the table of such permutations up to 64!, which is a number of ninety digits, an example of exemplary industriousness (Mersenne 1635/36, 117):

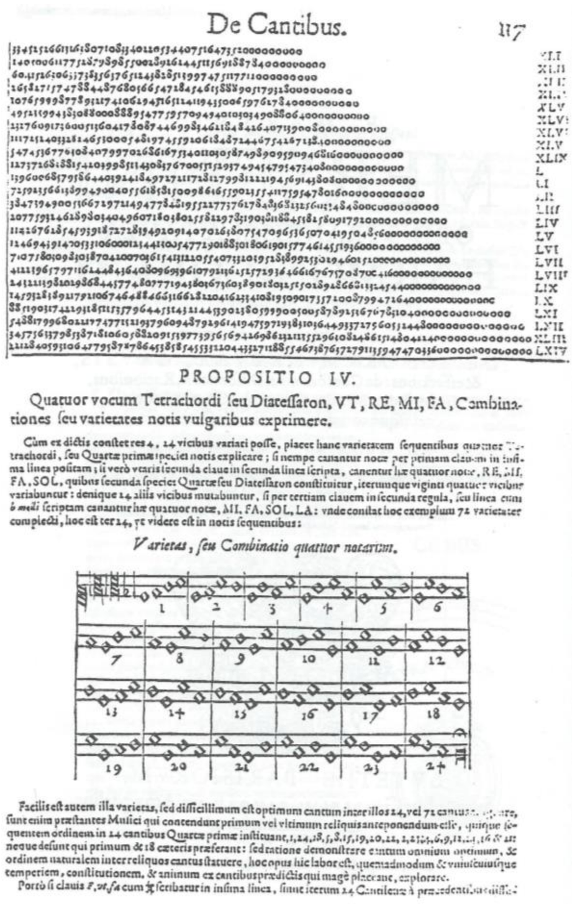


Illustration 5
Permutations of 41 up to 64 notes
(*Fuente*: M. Mersenne, *Harmonicorum libri*, Paris 1635/36, 117)

To my knowledge, no other author ever calculated – without a computer – a greater factorial. Directly after that table, in proposition IV, he listed the twenty-four different songs with four notes ut, re, mi, fa. A certain method is needed in order not to forget some permutations, especially if their number is very large. In proposition VII Mersenne investigates which is the best and most agreeable song of all songs if one selects the four notes ut, re, mi, fa or re, mi, fa, sol or mi, fa sol, la, respectively. The decision depends on justifiable criteria which differ from author to author. In the French book he enumerates the 720 permutations of the six notes do, re, mi, fa, sol, la (Mersenne 1636, 128):

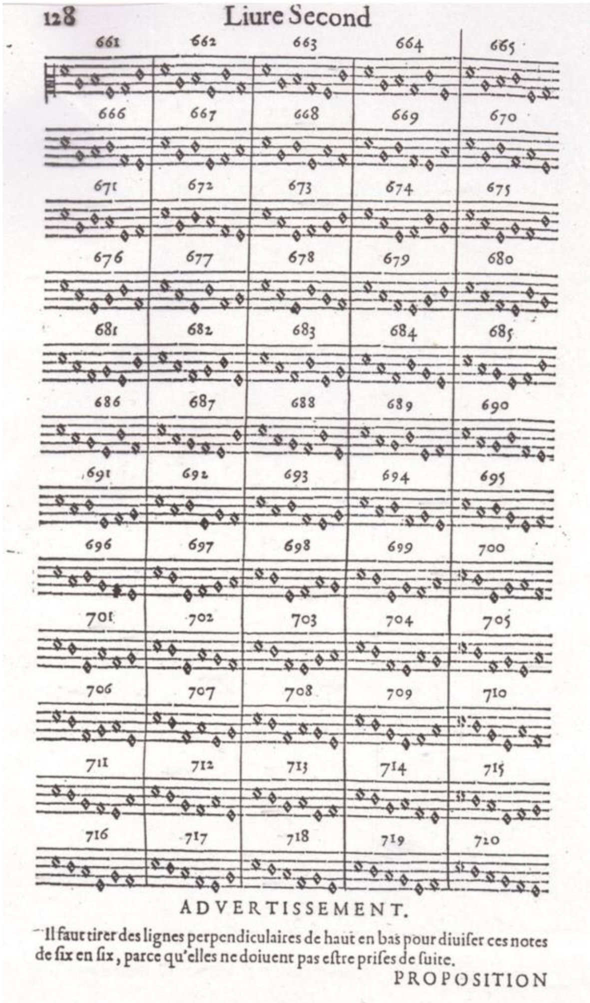


Illustration 6

720 permutations of six notes

(*Fuente*: M. Mersenne, *Harmonie universelle*, Paris 1636, 128)

There, too, he systematically studied all different types of repetitions regarding a certain number n. In his case, $n = 9$. Presumably this is a reminiscence of Llull, because Llull selected nine fundamental notions for his language theory (Mersenne 1636, 116):

Table des Chants qui se peuvent faire de 9 notes

Toutes différentes	362.880
2 semblables	181.440
3	60.480
4 et 2, 2 et 3	15.120
5	3.024
…	
2 et 7	36
Toutes semblables	1

In modern terms, he was looking for the multinomial numbers

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_p} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_p!}$$

where $n_1 + n_2 + \cdots + n_p = n$, $n_i \geq 1$, $i = 1, 2, \ldots, p$. If $p = n$, all n_i must be equal to 1. Mersenne, however, never mentioned the identity of this expression with the coefficients of the power of a polynomial.

The equation $n_1 + n_2 + \cdots + n_p = n$ represents a partition of n. In other words, Mersenne enumerated all thirty partitions of nine in order to consider all thirty types of repetitions in the case of nine notes. Hence we have a close relation between additive number theory and permutations with repetitions, both being important subjects of combinatorics.

1.3. Arrangements as a Generalization of Permutations

After the permutations Mersenne deals with arrangements with and without repetitions. If we do not take all n elements out of n (which would lead to permutations or to $P(n, n)$), but only an ordered selection of p of the n elements, we get

$$P(n, p) = n(n-1) \cdots (n-p+1) \qquad \text{(Mersenne 1635/36, 133)}$$

Mersenne elaborated the following *General table of combinations*:

Tabula generalis Combinationum

I	22
II	462
III	9240
IV	175560
…	
XXI	etc.
XXII	1124000727777607680000
Summa	3055350753492612960484

As always, Mersenne considered special cases like n = 22 (three octaves), p = 1, 2, …, 22 without demonstrating his rule. The demonstration would be based on the principle of multiplication of choices:

If there are k successive choices to be made in n_i ways, for $1 \leq i \leq k$, the total number of ways of making these choices is the product $n_1, n_2, \ldots, n_k$.

The last two numbers consist of twenty-two figures. Mersenne calculated even the sum of all twenty-two different values $P(n, 1), \ldots, P(n, n)$ and emphasized the utility of such a table.

The same applies to arrangements with repetitions. Every place can be occupied by one of the n elements. Hence Mersenne just said that we have to calculate the corresponding power of twenty-two or more general: The number searched for is n^p, if we select p elements out of n (Mersenne 1635/36, 140). He calls his table *Most general table of all possible songs*:

Tabula generalissima Cantilenarum omnium possibilium

I	G 22
II	A 484
III	# 10648
IV	C 234256
…	
IX	a 1207269217792
…	
XXII	ggg 341427877364219557396646723584
Summa	357686347714896679177439424706

Mersenne answered to an interesting question: There are $n^p - P(n, p)$ arrangements where at east one element is repeated.

1.4. Combinations

If the order of the selected elements does not play any role one gets the number $C(n, p)$ of combinations or subsets containing p elements of a set of n elements. To that end Mersenne correctly used his results, that is, tables for $P(n, p)$ and $P(n, n)$ thus establishing the rule: $C(n, p) = \dfrac{P(n, p)}{P(p, p)}$. This is in modern terms $\binom{n}{p}$ (Mersenne 1635/36, 137).

His *Most useful, methodical table of C(n,3), C(n,4), etc.* presupposing the existence of 36 notes reads as follows:

Tabula Methodica conternationum, Conquaternationum, etc. utilissima.

I	II	III	IV	V
I	36	1	36	35
II	630	2	1260	34
III	7140	6	42840	33
…				

There are five columns. The first column indicates the numbers of selected notes, the second column the numbers of corresponding combinations, the third the numbers of permutations, the fourth the numbers of corresponding arrangements, the fifth the sequence of decreasing numbers beginning with 35 that produce step by step the numbers of arrangements. It is worth mentioning that the table contains typographical errors. For example, 10! =3628800 is lacking. And indeed, Mersenne complained that there was only one publishing house in France that could print notes. Moreover this printer Pierre Ballard was very slow.

Let us calculate an example: 36.35 = 1260, 1260:2! = 630 or $P(36,2) = 1260$, $P(2,2) = 2$, $C(36,2) = 630$.

Mersenne used the relation $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ without giving a reason for it, that is, for the symmetry of binomial coefficients.

Moreover Mersenne constructed the arithmetical triangle in rectangular form (Mersenne 1635/36, 136) by using the relation $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$.

He spoke of the *Most beautiful and most useful table of the combination of twelve songs*:

Tabula pulcherrima et utilissima combinationis duodecim cantilenarum

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91
4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	364	455
5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001	1365	1820
6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003	4368	6188
7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	8008	12376	18564
8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440	19448	31824	50388
9	45	165	495	1287	3003	6435	12879	24310	43758	75582	125970
10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620	92378	167960	293930
11	66	286	1001	3003	8008	19448	43758	92378	184756	352716	646646
12	78	364	1365	4368	12376	31824	75528	167960	352718	705432	1352078
…											

Mersenne assumed that 36 notes are given. How many songs can be realized on condition that one selects only two, three, etc. notes? He hinted at predecessors without citing their names. Geronimo Cardano would have been such a predecessor.

Instead of discussing combinations with repetitions in general, he considered the more difficult problem of finding combinations which represent a special type of repetitions always mainly relying on his musical examples.

Case 1

First of all, Mersenne considered the case that exactly one note is repeated an arbitrary number of times. Let us represent the type of repetition by numbers which indicate how often the single notes are repeated.

4111, 2111 mean, for example, that one note occurs four times or twice, respectively, and that all other notes occur exactly once. Hence only the number of different notes matters, in our case 4, not the number of repetitions. Hence there are two steps:

1. Four places have to be occupied by the given notes.

2. Every note can replace the repeated note.

Therefore $C(n, 4)$ has to be multiplied by 4 or to be more general:

$$n \cdot C(n, p) = p\binom{n}{p}$$

Mersenne's example is $n = 22$, $1 \le p \le 12$ (Mersenne 1635/36, 138). He calls his table *New anagrammatic table*:

Tabula nova Anagrammatica

II	462
III	4620
IV	29260
V	131670
…	
XII	7759752

The numbers of the first column indicate the numbers p of different notes. The numbers of the second column indicate the numbers $p \cdot C(n, p)$ of possible combinations.

Case 2

The problem becomes more difficult, if not one but several notes are repeated in a certain way:

Type 1 122; 112 or one note is repeated r_1 times, two notes r_2 times;

Type 2 12; 13; 34; 45 or one note is repeated p times, a second note $p + n$ times;

Type 3 123; 234 or three different notes are repeated p, $p + 1$, $p + 2$ times, respectively.

In every line the same number of different notes is needed: 3 or 2 or 3, respectively. Yet, one has not to observe the values of the numbers of repetition, but their frequencies. Equal frequencies do not lead to a new combination if the repeated elements exchange their places. But a new combination is produced when elements of different frequencies exchange their places. Equal frequencies play the role of repetitions with regard to the permutations.

Type 1 leads to $\binom{n}{3}\frac{3!}{2!}$, type 2 to $n(n-1)$ possibilities. Mersenne does not mention the number of possibilities of type 3, namely $n\,(n-1)(n-2)$.

Case 3

Mersenne generalized the problem by considering all possible types of repetitions within a given number p of notes which are taken out of n notes. Hence he again wrote down the thirty partitions of 9 as in the case of permutations with repetitions (Mersenne 1635/36, 139). His *Outstanding table of nine notes* reads as follows:

Tabella novem notarum singularis absque ordine cum ordine

Omnes differentes	497420	180503769600
Similes 2	2558160	464152550400
2,2,1,1,1,1,1	3581424	324906785280
…		
Similes omnes	22	22
Summa	14307150	3897260317793

The first column represents the type of repetitions, that is, the partition of 9. The second column provides the number of corresponding combinations with repetitions of this type. The third column provides the number of corresponding arrangements, that is, of ordered selections with repetitions of this type.

The sum of all numbers of the second column is the number of all combinations with repetitions or $\binom{n+k-1}{k}=\binom{30}{9}$ or 14307150. Mersenne did not say this nor did he mention that the sum of all numbers of the third column is the number of all arrangements with repetitions or $n^k = 22^9$ or 1207269217792, This result is confirmed by his table where he calculated the powers of 22, from 22^1 up to 22^{22}.

Unfortunately Mersenne did not explain how he had calculated the numbers of the second and third column. He was only saying that he explained the method elsewhere, but in any case not in his published works. But we can reconstruct it generalizing his method of case 1 and 2.

First of all let us consider a musical example: ut ut re re mi fa sol la si. The frequency 2 occurs twice, the frequency 1 five times or:

$$9 = 1.5 + 2.2, \quad r_1 = 5, \quad r_2 = 2, \quad r = 5 + 2 = 7.$$

The number sought for is $C(22,7)\dfrac{7!}{5!\,2!} = 3581424.$

Let p be the number of selected notes, n the number of given notes. The partition of p will be

$$p = 1 + 1 + \cdots + 1 + 2 + 2 + \cdots + 2 + \cdots + m + m + \cdots + m$$

$$= 1r_1 + 2r_2 + \cdots + pr_p, \quad 1 \le m \le p, \quad 0 \le r_i \le p$$

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_m = r$$

The partition can be interpreted in the following way:

r_1 pairwise distinct notes occur exactly once, r_2 pairwise distinct notes occur exactly twice, r_i pairwise distinct notes occur exactly i times. If one note occurs p times, $r_p = 1$, all other r_i must be equal to zero. If no note at all is repeated, $r_1 = p$, all other r_i must be equal to zero. There are, in fact, only $r_1 + r_2 + \cdots + r_m = r$ distinct notes all in all.

Hence according to case 1, we have first of all $C(n, r)$ combinations. This number has to be multiplied by a factor that has still to be searched for. We get a new unordered selection, a new combination of the given type of repetitions as long as a note of a certain frequency replaces another note of another frequency, for example, if two notes which occur once or twice, respectively, are exchanged. We do not get a new combination if two notes of the same frequency are exchanged, because we deal with unordered selections. The same frequencies function as repetitions in a permutation with repetitions of a certain type we dealt with somewhat earlier. For that reason the number looked for is: $C(n,r) = \dfrac{r!}{r_1!\,r_2!\cdots r_m!}$

In our example discussed above n was equal to 22, $p = 9$, $r = 7$.

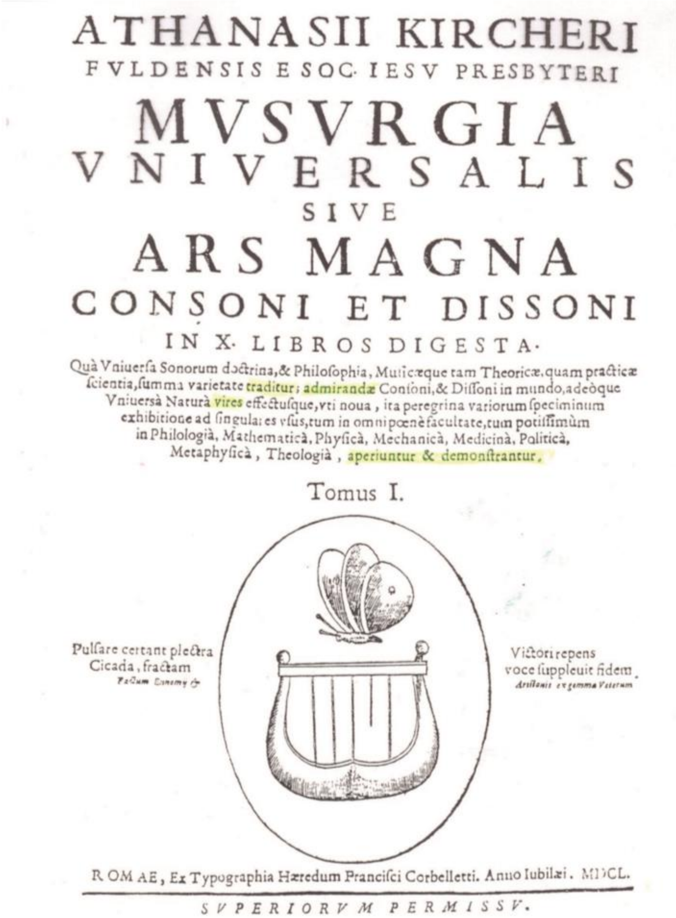
In a similar way we can calculate the number of ordered selections, that is, of arrangements of a certain type of repetitions. Now the order of the p selected notes matters, but now the type of repetitions of p has to be interpreted as permutation with repetitions. Hence the number of unordered selections has still to be multiplied by $\dfrac{p!}{(1!)^{r_1}(2!)^{r_2}\cdots(m!)^{r_m}}$.

Thirty years later Leibniz solved the same problem without knowing Mersenne's great writings on harmony and using another, more elementary method. Of course, Leibniz deduced the same result, as will be shown.

2. ATHANASIUS KIRCHER: HIS *UNIVERSAL MUSICAL ART*

Mersenne's combinatorial studies did not lack immediate influence on later writers. I mean the famous Lullist Athanasius Kircher and his *Musurgia universalis,* his *Universal musical art*, published in 1650 (Kircher 1650). Its unabridged, baroque title begins by promising:

Universal musical art, or great art of consonance and dissonance, subdivided into ten books, by which the whole doctrine and philosophy of notes and the science of theoretical and practical music are treated with the greatest versatility. The wonderful forces and effects of the consonance and dissonance in the world and hence in the whole of nature are revealed and proven by an equally new and unknown *exhibition of the various examples. This is done with regard to the individual applications in almost every faculty, as well as especially in philology, mathematics, physics, mechanics, medicine, politics, metaphysics, theology.*


ATHANASII KIRCHERI
FVLDENSIS E SOC. IESV PRESBYTERI
MVSVRGIA
VNIVERSALIS
SIVE
ARS MAGNA
CONSONI ET DISSONI
IN X. LIBROS DIGESTA.
Quà Vniuersa Sonorum doctrina, & Philosophia, Musicæque tam Theoricæ, quam practicæ scientia, summa varietate traditur; admirandæ Consoni, & Dissoni in mundo, adeòque Vniuersà Naturà vires effectusque, vti noua, ita peregrina variorum speciminum exhibitione ad singulares vsus, tum in omni poenè facultate, tum potissimùm in Philologià, Mathematicà, Physicà, Mechanicà, Medicinà, Politicà, Metaphysicà, Theologià, aperiuntur & demonstrantur.
Tomus I.

ROMAE, Ex Typographia Hæredum Francisci Corbelletti. Anno Iubilæi. MDCL.
SVPERIORVM PERMISSV.

Illustration 7
The claim of Kircher's *Universal musical art*
(*Fuente*: A. Kircher, *Musurgia universalis*, Rome 1650, title page)

A nice emblem shows a lyre of five chords one of them being broken and a cicada fluttering over it. It illustrates two ancient iambic verses consisting of six feet:

Pulsare certant plectra Victori repens

Cicada, fractam voce supplevit fidem.

The sticks vie to strike (the chords). For the winner

A cicada quickly replaces the broken chord by its voice.

The preceding copperplate print illustrates Pythagoras, his famous theorem, the forging smiths who allegedly enabled him to find his consonance theory. Music is represented by a female figure with some musical instruments.

The eighth book is of special interest for us. After its title page Kircher has composed the following *tristychon*, that is, three pairs of hexameters and pentameters:

Organum agit Mundus denis vocale Registris,
Rerum in eo quot sunt Entia, tot Metra sunt.
Est DEUS Harmostes, in quo Sapientia Patris,
Quae bene disposuit, Spiritus unit Amor.
Hic Amor harmonia est, hoc Mundus amore ligatur;
Organon hunc mundum Numinis esse negas?

The world plays a vocal organ with ten stops,
It contains as many beings of things as there are meters.
God is a composer in which the wisdom of the father
who well ordered, the spirit unites as love.
This love is harmony, the world is joined together by this love;
do you deny that this world is an organ of the Godhead?

Here again we come across the key notion *disponere*, to order, that we have met at the beginning of these considerations. The citation taken from the mythical author Hermes Trismegistus who wrote to the physician Asclepius emphasizes this aspect (Knobloch 1995, 77):

Musica nihil aliud est quam omnium ordinem scire.
Music is not anything but to know the order of all things.

The book itself is entitled:

Artis magnae consoni, et dissoni liber octavus de musurgia mirifica hoc est ars nova musarithmica recenter inventa, qua quivis etiam quantumvis musicae imperitus, ad perfectam componendi notitiam brevi tempore pertingere potest.

(The eighth book of the great art of consonance and dissonance, that is, the wonderful musical art, a new, recently invented musical-arithmetical skill, by which everyone is able to acquire in a short time a profound knowledge of composing, even if he is arbitrarily inexperienced in music.)

For Kircher, too, musical composition consisted in a sequence and arrangement of consonances. Yet, in all arts and sciences practice and theory are joined together. This combinatorial approach is mirrored by the four parts of the book:

1. the combinatorial musical art,
2. the rhythmic or poetical musical art,
3. the practice of song-building musical numbers (*musarithmi melothetici*),

4. mechanical musical art or the various transposition of mobile musical arithmetical columns (*musarithmicae columnae*).

The **first part** explains the fundamental combinatorial operations in order to demonstrate the huge variety of possible arrangements and combinations of notes. The second part applies these rules to rhythms, that is, notes and metrical sequences of syllables or metrical feet: a setting to music. The third part explains Kircher's new musical art which consists in an artistic composition of song-ordering columns. How so ever this composition is done, it will result in a new harmony. This part is by far the longest part of the eighth book. The fourth part explains the use of a musical arithmetical box (*arca musurgica*).

Though Kircher mentioned Mersenne several times, he did not say any word that he repeated the explanations of his French predecessor, even using the numerical examples: Nine notes are selected out of n notes. He left aside, however, the most difficult problem of calculating the number of combinations and arrangements of certain types of repetitions. Obviously, he did not always understand his source.

Let us consider, for example, his *Combinatorial table II showing the number of permutations of things that are not different throughout but partly equal:*

Tabula II. Combinatoria ostendens numerum mutationum, rerum, in quibus non praecisa diversitas, sed quaedam sunt similes

1	2	3	4	5
Series rerum diversarum	Combinatio rerum omnium diversarum	Combinatio rerum in qua 2 similes	Combinatio rerum in qua 3 similes	Combinatio rerum in qua 4 similes
I	0			
II	2	0		
III	6	3	0	
…				

Mersenne had explained that there is one permutation of say nine equal notes. Kircher understood the notion of mutation, permutation, in the strict sense of the word and asserted that there is no permutation at all of *n* equal elements. He did note notice that this assertion contradicted the division rule taken over from Mersenne. Kircher's master pupil Caspar Schott exactly repeated this table in his *Magia universalis* (Schott 1657-1659 III, 688).

While the **second part** is not essential for our purpose, the **third part** is again worth discussing. The miraculous force if the combination of things can be especially found in music. Hence the principles of music are reduced to methodical tables which Kircher called musical numbers (*musarithmi*) or harmonical numbers. He conceived three sets (*syntagmata*) of tables in which several song-building tablets (*pinaces*) contain whatever is important in song-building music or in the art of composition. The first set consists of eleven tablets, the second and third sets consists of six tablets.

The eleven tablets of the first set contain the whole poetical or metrical musical art. The six tablets of the second set describe the poetical or metrical musical art by flowery and ornate musical numbers. The six tablets of the third set are accommodated to the poetical as well as to the rhetorical part of the musical art and help to express by conveying the charm of music.

Moreover, Kircher enumerated three necessary means for this musical, arithmetical building of songs (*melothesia musarithmetica*):

a *palimpsestum phonotacticum*: a writing material which can be used and wiped off. It describes the four voices soprano, alto, tenor, and bass;

a *mensa tonographica*: a table where the notes are written down by means of numbers;

the knowledge of the values of notes and time measures.

Then Kircher described the different tablets of the three sets. The first set explains, for example, the simple contrapuntal composition for four voices and a certain poetical rhythm marked by the figures of the thorough bass (Kircher 1650 II, 80):

MUSICAE RHYTHMICAE
PINAX III

Musarithmos continens pro Adoniis et Dactylicis aptos

Gaudia Mundi				Tollite principes			
Adonia				Dactylica			
55655	66666	55545	55455	55555	666666	444334	366555
88878	88282	22322	32123	888778	222882	888888	888778
33423	44434	77867	55678	533223	444334	666556	544223
88451	44262	55125	87651	111551	222662	444114	844551
…							

The left side is dedicated to Adonic verses, that is, to verses consisting of dactyls and spondees, the right side exclusively to dactyls.

As an example, Kircher added the composition by Bernardino Roccio who had elaborated his music according to Kircher's rules.

The **fourth part** explains the construction of the Musical-arithmetical box (*arca musurgica*), that is, of the musical-arithmetical columns and how they have to be combined (Kircher 1650 II, 186):

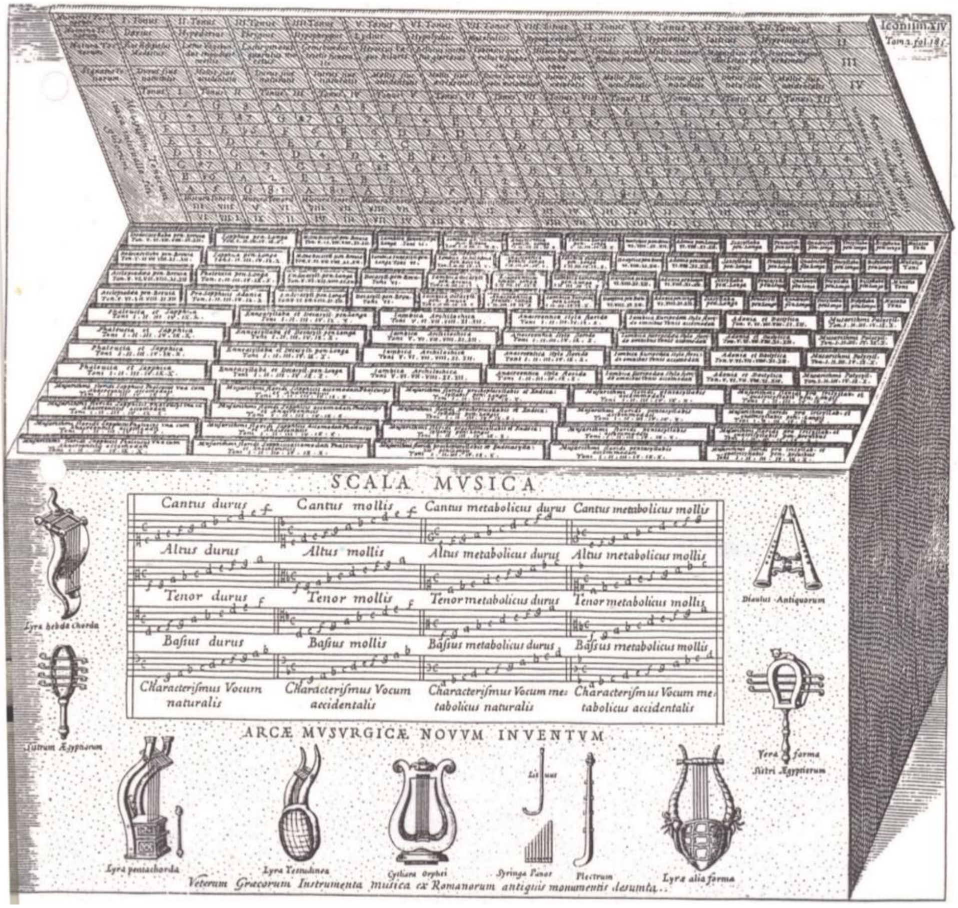


Illustration 8
Kircher's musical box
(*Fuente*: A. Kircher, *Musurgia universalis*, Rome 1650 II, 186)

He used the expression Musical abacus (*abacus musurgicus*) or Song-building abacus (*abacus melotheticus*) which he presumably took from Robert Fludd. Kircher's text example consisted of five parts (Kircher 1650, 186):

Cantate Domino VI short penultimate
Canticum novum, V short penultimate
laus eius III long penultimate
in Ecclesia V short penultimate
Sanctorum III long penultimate

The Roman figures denote the number of syllables of the single parts. Every part is represented by a tablet, the five tablets are united by a certain combination. Several different combinations result in a song (*melothesia*) (Kircher 1650, 187):

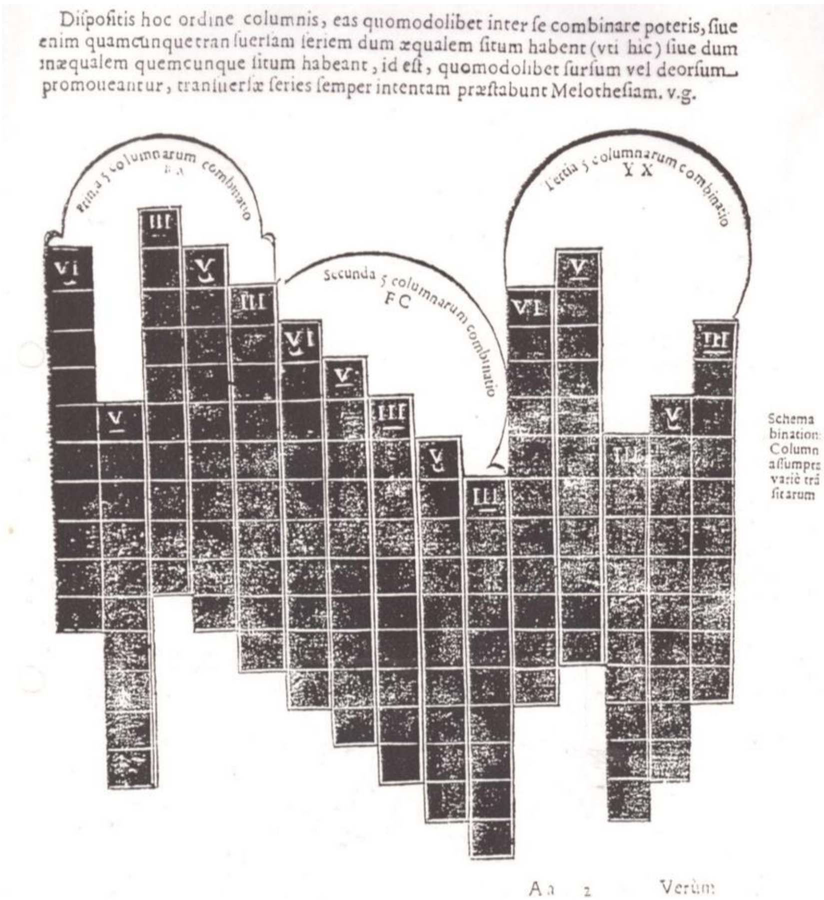


Illustration 9
Three combinations of song-building tablets
(*Fuente*: A. Kircher, *Musurgia universalis*, Rome 1650 II, 187)

Kircher explains: *Dispositis hoc ordine columnis, eas quomodolibet inter se combinare poteris* (After the columns have been ordered in this order, one will be able to combine them in any way). Kircher consciously uses the crucial expression *disponere*, to order. The similarity between his tablets and John Neper's small rods let Kircher speak of a *Rabdologia musurgica* (Kircher 1650 II, 190). He distinguished between an expanded musical abacus (*abacus musurgicus expansus*) and a contracted abacus (*abacus contractus*).

Kircher's master pupil Caspar Schott explained the mechanical composition of his teacher in his posthumously published work (Schott 1668):

Organum mathematicum libris IX explicatum quo per paucas ac facillime parabiles tabellas, intra cistulam ad modum organi pneumatici constructam reconditas, pleraeque mathematicae disciplinae, modo novo ac facili traduntur,

(Mathematical organ explained in nine books by which most of the mathematical disciplines are described in a new and easy way by means of few tablets that can be prepared most easily, kept within a box that has been constructed in the way of a pneumatic organ.)

The *Mathematical organ* was Kircher's invention. In 1661 he had sent a specimen of it together with a letter from Rome to Vienna to the archduke Karl Joseph. Schott reprinted this letter in his own book and added an illustration (Schott 1668, 55):

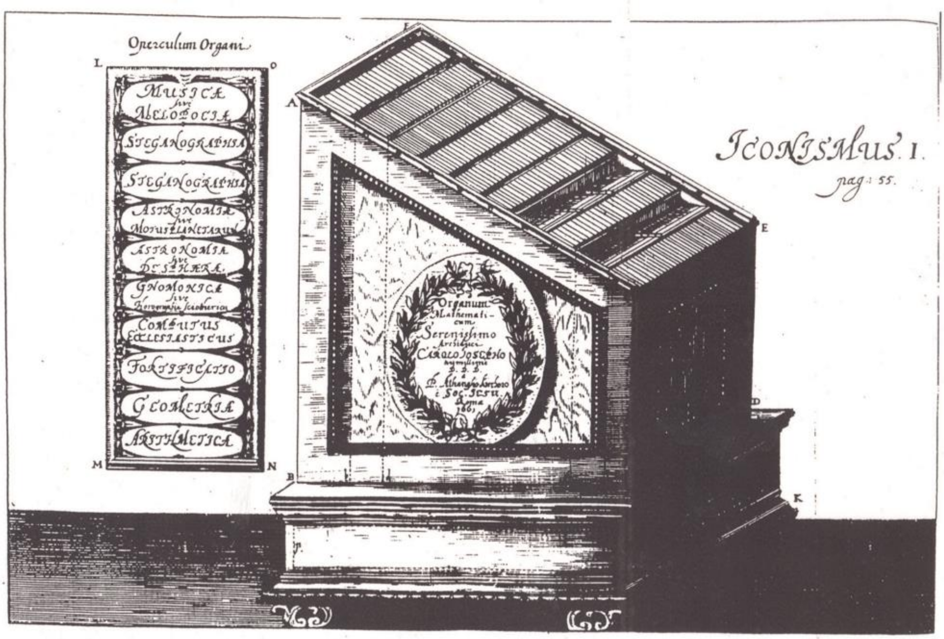


Illustration 10
Kircher's mathematical organ
(*Fuente*: C. Schott, *Organum mathematicum*, Würzburg-Nürnberg 1668, 55)

The list of the nine different mathematical disciplines begins with music. In Schott's book the ninth book is entitled *Liber nonus musicus continens Tabellas pro Musurgia* (Ninth musical book containing the tablets for the musical art).

There we find again six tablets that are covered with writing on both sides, that is, with musical numbers denoting the four voices soprano, alto, tenor, bass. The *Classis prima tabellarum musurgicarum* (First class of musical tablets) concerns Euripidean and Anacreontic verses (Schott 1668, 761):

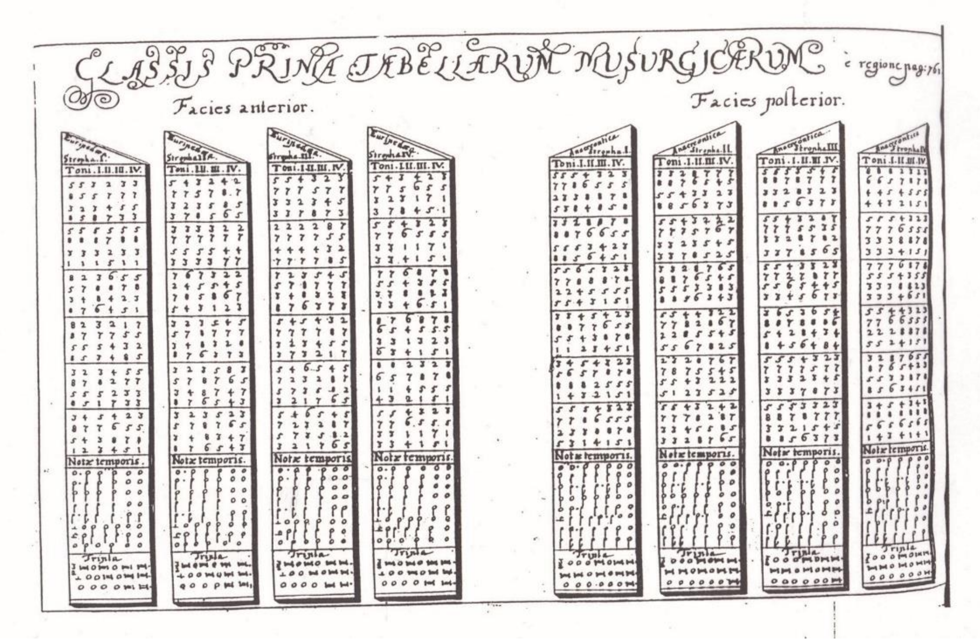


Illustration 11
Schott's first class of musical tablets
(*Fuente*: C. Schott, *Organum mathematicum*, Würzburg – Nürnberg 1668, 761)

Later on Schott explains Kircher's distinction between the *abacus melotheticus expansus* or *contractus* (song-building expanded or contracted abacus). Iconismus LVIII describes, for example, the contracted song-building abacus (Schott 1668, 819):

First the bass is constructed according to certain rules, then the pertinent trebles which form the triads.

Illustration 12
Schott's contracted song-building abacus
(*Fuente*: C. Schott, *Organum mathematicum*, Würzburg-Nürnberg 1668, 819)

3. GOTTFRIED W. LEIBNIZ 1666-JAKOB BERNOULLI 1692

In 1666 Gottfried Wilhelm Leibniz elaborated his *Dissertation on the combinatorial art in which the doctrine of combinations and transpositions is constructed by new rules from the fundamental principles of arithmetic and the use of both is demonstrated through the whole world of sciences. Also new seeds of the art of thinking or the logic of invention are spread. A survey of the whole treatise is mentioned beforehand and a demonstration of the existence of God instead of a supplement carried out according* *to mathematical certainty* (Leibniz 1666). He still adhered to Lullism, wanted to reorganize logic, especially logic of discovery. He pinned his hopes on Kircher, because he knew that Kircher was writing his *Ars magna sciendi* (Great art of knowledge). Later on he frankly admitted his disappointment about it (Knobloch 1973, 20).

He was neither acquainted with the extensive Lullistic literature nor with the newer mathematical development. He did not reach the mathematical difficulty or generality of Mersenne's problems. His sixth problem dealt with a number of arrangements of a certain type of repetitions, that is, with Mersenne's most complicated problem without that he knew Mersenne's *Books of Harmony*. Hence he developed his own solution of this problem which differed from that of Mersenne. His presuppositions were simpler than that of Mersenne:

1. He selected up to six notes out of six notes, while Mersnne selected nine notes out of 22 notes.
2. He enumerated nine instead if the eleven possible types of repetitions. He erroneously omitted the types of repetitions 6, 51. He adhered to the Italian designations of notes (ut re mi fa sol la) without introducing – like Mersenne - the language of number-theoretical partitions.
3. He multiplied the number of possible combinations or selections of a certain type of repetitions by the number of permutations with repetitions of this type of repetitions, as did Mersenne. Unfortunately, his rule of calculating the number of permutations with repetitions was false.

But if we leave aside this factor and if we only consider the number of unordered selections or combinations, we indeed get Mersenne's result in a new way. To that end let us consider his example: ut ut re re mi fa (Leibniz 1666, 218).

This type of repetition can be described by: 2 2 1 1. Leibniz argued as follows:

There are $\binom{6}{2}=15$ possibilities to select two elements so that each of them occurs twice. There are $\binom{4}{2}=6$ possibilities to select two elements out of the remaining four. Each of them occurs once. Hence there are $\binom{6}{2}\binom{4}{2}=15\cdot 6=90$ combinations of the type of repetition 1 1 2 2 = $1r_1 + 2r_2 = 1 \cdot \underline{2} + 2 \cdot \underline{2}.$

Leibniz's way of arguing can easily be generalized. Let

$$p = 1r_1 + 2r_2 + \cdots + pr_p, \quad r_1 + r_2 + \cdots + r_p = r$$

the partition of *p*, the whole number of selected elements. The number of combinations of this type of repetitions is:

$$\binom{n}{r_1}\binom{n-r_1}{r_2}\cdots\binom{n-r_1-r_2-\cdots-r_{p-1}}{r_p}$$

This product is identical with Mersenne's expression $\binom{n}{r}\dfrac{r!}{r_1!\,r_2!\cdots r_m!}$ because this expression can be reduced by r!

One of Leibniz's many correspondents was the Suiss mathematician Jakob Bernoulli who surpassed the combinatorial difficulties of his predecessors. This became evident when his *Ars conjectandi* appeared posthumously in 1713. Yet, already in 1692 he revealed his Lullistic thinking when he gave his Inaugural lecture as dean of the philosophical faculty of the university of Basle. He began by saying (Bernoulli 1975, 98f.):

Infinitam varietatem, quae cum in naturae operibus, tum in actionibus mortalium elucet, quaeque praecipuam hujus universi pulcritudinem constituit, non aliunde quam ex diversimoda compositione, mixture vel transpositione partium ejus inter se originem ducere palam est.

(It is obvious that the infinite variety which is manifest both in the works of nature and in the actions of mankind and which constitute the outstanding beauty of this universe does not derive its origin from anywhere but from the divers composition, mixture or transposition of its parts with each other.)

He declared that more outstanding philosophers thought up the combinatorial art and continued:

Si tamen usum et necessitatem spectes, universale prorsus est, et ita comparatum, ut sine illo (sc. negotio) nec sapientia Philosophi, nec Historici exactitudo, nec Medici dexteritas, aut Politici prudentia consistere valeat.

(If one, however, looks at its use and necessity, it is absolutely universal and so established that without that work neither the wisdom of the philosopher nor the exactitude of the historian nor the dexterity of the physician or the prudence of the statesman is able to stand.)

These words clearly remind of Mersenne's and Kircher's statement that we have discussed above.

4. EPILOGUE

Still in the 18th century authors took an interest in the relationship between combinatorics and musical composition, among others Euler and Mozart. Leonhard Euler's mathematical notebooks ranging from 1725 up to the end of his life contain many interesting considerations dealing with musical problems. They never appeared in his published works (Knobloch 1987). Hence they are worth considering, at least those which are directly connected with our combinatorial issues and which were written down between 1725 and 1727.

1. There are 51 sequences of chords for compositions for four voices written by means of numeral figures. One of them is written by means of figures of the thorough-bass (Knobloch 1987, 67). Obviously, Euler took this notation from Kircher's *Musurgia universalis.*

Illustration 13
Euler's permutations of sequences of notes
(*Fuente*: L. Euler, *Mathematisches Notizbuch* 129, f. 49v)

2. Combinatorial aspects played a role when he constructed a triad over the bass voice and its two inversions (Mathematical notebook 129, f. 53v), for example:

1 5 3
5 3 1
3 1 5
1 1 1

3. Euler permuted 28 sequences of notes according to certain restricting rules, for example a sequence consisting of a crotchet, a quaver, and two pairs of semiquavers. The pairs must not be separated. Hence such a sequence represents the type of repetitions abcc and admits twelve permutations. And Euler enumerated indeed these twelve permutations.

Ten years after Euler's death and two years after Mozart's death, that is, in 1793, J. J. Hummel published a Musical game of dice attributed to Wolfgang Amadeus Mozart (Mozart 1956). It seems to be possible that Mozart himself elaborated this game. There are 2.88 = 176 numbered waltz bars:

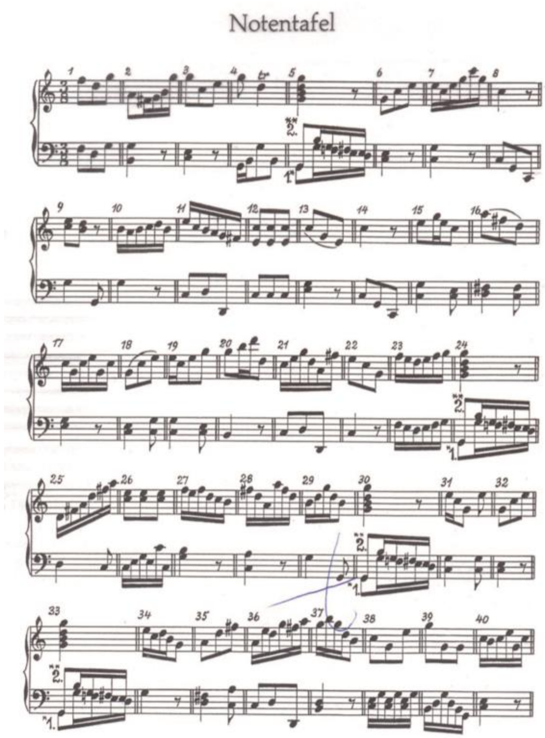


Illustration 14
Mozart's first forty waltz bars
(*Fuente*: W. A. Mozart, *Musikalisches Würfelspiel*, Mainz 1956)

The dice players produce a bipartite waltz. The order of the eight bars of its two parts is determined by throwing two dice and by means of two matrices:

1. Walzerteil

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
2	96	22	141	41	105	122	11	30
3	32	6	128	63	146	46	134	81
4	69	95	158	13	153	55	110	24
5	40	17	113	85	161	2	159	100
6	148	74	163	45	80	97	36	107
7	104	157	27	167	154	68	118	91
8	152	60	171	53	99	133	21	127
9	119	84	114	50	140	86	169	94
10	98	142	42	156	75	129	62	123
11	3	87	165	61	135	47	147	33
12	54	130	10	103	28	37	106	5

2. Walzerteil

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
2	70	121	26	9	112	49	109	14
3	117	39	126	56	174	18	116	83
4	66	139	15	132	73	58	145	79
5	90	176	7	34	67	160	52	170
6	25	143	64	125	76	136	1	93
7	138	71	150	29	101	162	23	151
8	16	155	57	175	43	168	89	172
9	120	88	48	166	51	115	72	111
10	65	77	19	82	137	38	149	8
11	102	4	31	164	144	59	173	78
12	35	20	108	92	12	124	44	131

Illustration 15
The two parts of a waltz described by means of two matrices
(*Fuente*: W. A. Mozart, *Musilaisches Würfelspiel*, Mainz 1956)

The Roman figures in numbering the eight columns denote the cast. The Arabic figures 2, 3, …, 12 ascribed to the rows represent the possible outcomes of the casts. If the n-th cast results in the outcome m, the element $a_{m,n}$ of the matrix denotes the number of the next waltz bar, which is to be found among the 176 written down waltz bars. The dice replace the subjective choice of a certain bar, though the waltz could be composed without dice, too, that is, by subjective choices.

Since the middle of the 18th century, Kircher's mechanical compositions were denounced as *sounding algebra* (Kaul 1932, 368). The French poet Paul Valéry put it in the following way: *Le secret du choix n'est pas moins important que le secret de l'invention* (*The secret of choice is no less important than the secret of invention*) (Mozart 1956, 8).

BIBLIOGRAFÍA

BERNOULLI, J. (1975). *Die Werke,* hrsg. von der Naturforschenden Gesellschaft in Basel. Band 3. Basel.

CLAVIUS, Ch. 1611. *In sphaeram Ioannis de Sacrobosco commentarius*, in: Christoph Clavius, *Opera mathematica*, vol. II, first part. Mainz. (Reprint, together with a preface and name index by Eberhard Knobloch. Hildesheim, Zurich, New York 1999).

FERMAT, Pierre de (1679). *Varia opera mathematica . Accesserunt selectae quaedam ejusdem Epistolae, vel ad ipsum a plerisque doctissimis viris Gallice, Latine, vel Italice, de rebus ad Mathematicas disciplinas, aut Physicam pertinentibus scriptae.* Toulouse.

KAUL, O. (1932). Athanasius Kircher als Musikgelehrter, in: *Aus der Vergangenheit der Universität Würzburg, Festschrift zum 350-jährigen Bestehen der Universität Würzburg.* Berlin, p. 363-370.

KIRCHER, A. (1650). *Musurgia universalis sive ars magna consoni et dissoni in X libros digesta Qua Universa Sonorum doctrina, et Philosophia, Musicaeque tam Theoricae, quam practicae scientia, summa varietate traditur; admirandae Consoni, et Dissoni in mundo, adeoque Universa Natura vires effectusque, uti nova, ita peregrina variorum speciminum exhibitione ad singulares usus, tum in omni poene facultate, tum potissimum in Philologia, Mathematica, Physica, Mechanica, Medicina, Politica, Metaphysica, Theologia, aperiuntur et demonstrantur*. Roma. (Reprint Hildesheim – New York 1970).

KNOBLOCH, E. (1973). *Die mathematischen Studien von G. W. Leibniz zur Kombinatorik auf Grund fast ausschliesslich handschriftlicher Aufzeichnungen dargelegt und kommentiert.* Wiesbaden.

KNOBLOCH, E. (1987). Musiktheorie in Eulers Notizbüchern. *NTM-Schriftenreihe für Geschichte der Naturwissenschaft, Technik, Medizin* 24, 63-76.

KNOBLOCH, E. (1995). Harmony and cosmos: mathematics serving a teleological understanding of the world. *Physis* (Nuova serie) 32, p. 55-89.

LEIBNIZ, G.W. (1666). *Dissertatio de arte combinatoria, in qua Ex Arithmeticae fundamentis Complicationum ac Transpositionum Doctrina novis praeceptis exstruitur; et usus ambarum per universum scientiarum orbem ostenditur; nova etiam Artis Meditandi, Seu Logicae Inventionis semina sparguntur. Praefixa est Synopsis totius Tractatus, et additamenti loco Demonstratio Existentiae Dei, ad Mathematicam certitudinem exacta.* Leipzig. I cite the reprint in: Gottfried Wilhelm Leibniz, Sämtliche Schriften und Briefe, herausgegeben von der Akademie der Wissenschaften der DDR, 6. Reihe Philosophische Schriften, 1. Band. 2. Auflage. Berlin 1990, 163-256.

MERSENNE, M. (1635/1636). *Harmonicorum libri in quibus agitur de sonorum natura, causis, et effectibus: de Consonantiis, Dissonantiis, Rationibus, Generibus, Modis, Cantibus, Compositione, orbisque totius Harmonicis Instrumentis. Ad Henricum Mommorum. Opus utile Grammaticis, Oratoribus, Philosophis, Iurisconsultis, Medicis, Mathematicis, atque Theologis.* Paris.

MOZART, W. A. (1956). *Musikalisches Würfelspiel, Eine Anleitung "Walzer oder Schleifer mit zwei Würfeln zu componieren ohne Musikalisch zu seyn, noch von der Composition etwas zu verstehen"*, hrsg. von Karl Heinz Taubert. Mainz, etc.

SCHOTT, C. (1657-1659). *Magia universalis naturae et artis opus quadripartitum*. 4 vols. Würzburg.

SCHOTT, C. (1668). *Organum mathematicum libris IX explicatum quo per paucas ac facillime parabiles Tabellas, intra cistulam ad modum Organi pneumatici constructam reconditas, pleraeque Mathematicae Disciplinae, modo novo ac facili traduntur.* Würzburg-Nürnberg.

CAPÍTULO 17

PROBABILITÉ, LANGAGE, LOGIQUE DE LA VISION ET JURISPRUDENCE CHEZ LEIBNIZ

ÁNGELA PALERMO
Université de France-Comté

1. INTRODUCTION

Parmi les penseurs qui font partie de cet univers immense et étonnant par l'ampleur de ses horizons philosophiques, qu'est la modernité, Leibniz a été certainement un des plus originaux. Son influence et ses théories philosophiques sont fondamentales à bien des égards, mais ce qui est à mon avis vraiment remarquable, tient au fait qu'il a su traiter la question du lien entre le probable, la jurisprudence et la théorie du langage, de la manière la plus originale et la plus féconde d'un point de vue philosophique, en comprenant le rôle crucial que joue la logique juridique dans la compréhension de ce lien complexe. L'examen de la pensée de Leibniz fait nous comprendre que probabilité, droit et langage ne sont pas étrangers l'un à l'autre, bien au contraire.

2. LE CONCEPT DE PROBABLE CHEZ LEIBNIZ

Notamment, les réflexions de Leibniz sur le calcul des probabilités lui sont suggérées par sa rencontre avec le mathématicien hollandais Christian Huygens à Paris en 1672. C'est pendant son séjour parisien que Leibniz connaît la question posée par le Chevalier de Méré à Pascal,[1] et c'est toujours à cette époque qu'il a l'occasion d'étu-

[1] En 1654 le chevalier de Méré interroge Pascal sur la solution du problème des partis, consistant à savoir comment effectuer le partage des enjeux entre deux joueurs lorsque ceux-ci sont contraints d'interrompre leur jeu avant la fin. A partir de là, commence la correspondance entre Pascal et

dier les travaux de Fermat, de Pascal et, bien sûr, de Huygens sur les jeux de hasard ; et ceux de Van Hudde et Jan de Witt sur les rentes viagères.

Dans un de ses premiers écrits sur la probabilité, le *De Conditionibus* (1665), Leibniz introduit pour la première fois les idées relatives au rapport entre le calcul de la probabilité et le calcul des jugements par la définition de la proposition conditionnelle. Il a compris que la théorie des combinaisons avait un rapport avec la probabilité ; Leibniz laisse entrevoir que la probabilité possède une forte composante objective de telle sorte que les degrés de probabilité soient des degrés de certitude. Il a été aussi le tout premier à comprendre que la théorie de la probabilité pouvait être utilisée dans une branche de la logique comparable à la théorie de la déduction ; que la probabilité utilisée dans les jeux de hasard pouvait être généralisée et axiomatisée pour en faire une pure science du raisonnement à appliquer dans tous les cas d'une prise de décision dans l'incertain. De plus, le recours à la jurisprudence met en évidence la conception *épistémique* plutôt qu'*aléatoire* de la probabilité ;[2] cette notion relationnelle et objective de la probabilité qui détermine les degrés de vraisemblance *ex datis* constitue le premier vrai pas vers une logique inductive qui sera développée plus tard (au XX^e^ siècle) par Keynes, Jeffreys et Carnap.

Chez Leibniz, on assiste à une tentative universaliste tout à fait originale, consistant à réduire tout raisonnement à un calcul qui est le calcul mathématique des probabilités. Il assimilait complètement les probabilités *a posteriori* aux probabilités *a priori*, et comparait les valeurs approchées qu'on en obtient par des statistiques à l'approximation indéfinie dont est susceptible le nombre de Ludolph (le nombre Π). Il s'agissait au fond, de la question de savoir si la contingence fait échec au déterminisme, ou si la loi des grands nombres soumet à un déterminisme apparent des phénomènes individuellement contingents. Leibniz avait d'autant moins de raison de ne pas adopter cette dernière thèse, qu'il professait lui-même que la contingence n'exclut nullement le déterminisme ; au contraire il l'implique même (Coutourat 1901).

Fermat où ont été établis les éléments fondamentaux du nouveau calcul. Cette date de 1654 est, encore aujourd'hui, considérée comme celle de la naissance du calcul des probabilités.

[2] La probabilité peut être divisée en *épistémique* et *aléatoire* (cette dernière peut-être encore divisée entre "classique" et frequentiste). La probabilité épistémique exprime le degré de croyance envers une assertion probable qui peut être vrai, même si l'assertion ne se réfère pas à un événement unique. Avec des différentes nuances et en différentes époques, cette conception de la probabilité a été partagée par Pascal (qui fonde sa théorie mathématique sur la probabilité aléatoire, mais étend la concept de confiance dans son célèbre *pari*); Locke (qui voit la probabilité comme degrés d'assentiment); Bayes (peut-être avec une vision plus réduite par rapport à ce qu'on entende aujourd'hui par "probabilité bayesienne"); Keynes, Ramsey, De Finetti, Savage, Carnap (sauf que sa probabilité logique exprime le degré de confirmation d'une assertion, plutôt qu'un jugement subjectif de confiance); Jeffreys, Cox, Good, Cohen, Shafer (qui, toutefois, axiomatisent la probabilité de manière différente). La probabilité aléatoire classique est le rapport entre le nombre d'événements favorables et le nombre d'événements possibles. Cette conception a fourni le modèle pour tous les autres modèles de probabilité et elle se fonde exclusivement sur les caractéristiques d'un générateur d'événements aléatoires, tel le lance de dés.

En s'appuyant sur les idées qui lui venaient de sa correspondance avec Jacob Bernoulli, il explique la continuité logique existant entre probabilité mathématique[3] et *certitude morale*,[4] nouvelle catégorie philosophique et notion solidaire du nouveau processus pénal moderne au XVII^e siècle, laquelle suppose que pour tous les degrés de possibilité qui se trouvent au-dessous de la certitude, il faut calculer la probabilité :

> "*Car plusieurs arguments probables joints ensemble font quelquefois une certitude morale, et quelque fois non. Il faut donc une méthode certaine pour le pouvoir déterminer. On dit souvent avec justice que les raisons ne doivent pas être comptées mais pesées ; cependant personne ne nous a donné encore cette balance qui doit servir à peser la force des raisons. C'est un des plus grands défauts de notre Logique, dont nous nous ressentons même dans les matières les plus importantes et les plus sérieuses de la vie, qui regardent la justice, le repos et le bien de l'État, la santé des hommes et même la religion (...)*".[5]

---

[3] Lettre de Leibniz à Jacob Bernoulli du 26 novembre 1703, Hanovre. Dans *Journal Electronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique*, vol. 2 n°1, juin 2006 : "L'estimation de la probabilité est très utile, toutefois en matière juridique et politique, et en général, ce n'est pas tant comme le résultat d'un calcul minutieux que par l'énumération soigneuse de toutes les circonstances (…). Quand nous estimons les probabilités empiriquement par des suites d'expériences, vous cherchez à savoir si cette méthode permet finalement d'obtenir une estimation parfaite. Et vous écrivez que ceci vous l'avez obtenu. Il me semble qu'il y a là une difficulté, parce que les *contingences* ou ce qui dépend d'une infinité de circonstances ne peuvent pas être déterminées par un nombre fini d'expériences ; la nature sans doute a ses habitudes, provenant du retour des causes, mais ce n'est ως επί τό πολύ. C'est pourquoi, ne peut-on pas objecter qu'une nouvelle expérience puisse s'écarter un tant soit peu de la loi de toutes les précédentes, du fait de la variabilité même des choses ?".

[4] La certitude morale, à partir du XVII^e siècle, sera souvent substituée à la certitude légale grâce à l'élévation des arguments qui "existent nécessairement" et "révèlent nécessairement" à la dignité de "preuves certaines", en sorte que le juge doit être celui qui va décider du niveau de certitude atteint par un argument. Selon l'article "Certitude" de l'*Encyclopédie* : "La certitude morale est celle qui est fondée sur l'évidence morale : telle est celle qu'une personne a du gain ou de la perte de son procès, quand son Procureur ou ses amis le lui mandent, ou qu'on lui envoie copie du jugement, parce qu'il est moralement impossible que tant des personnes se réunissent pour en tromper une autre à qui elles prennent intérêt, quoique cela ne soit pas rigoureusement et absolument impossible". Cf. aussi Arnauld-Nicole (1662), IVe partie, ch, XIII et ch. XIV: "Car comme nous nous devons contenter d'une certitude morale dans les choses qui ne sont pas susceptibles d'une certitude métaphysique, lors aussi que nous ne pouvons pas avoir une entière certitude morale, le mieux que nous puissions faire, quand nous sommes engagés à prendre parti, est d'embrasser le plus probable puisque ce serait un renversement de la raison d'embrasser le moins probable"; et l'*Ars conjectandi* de J. Bernoulli (1713) p. 16: "La probabilité est en effet un degré de la certitude et en diffère comme la partie diffère du tout. Evidemment, si la certitude intégrale et absolue, que nous désignons par la lettre a ou par l'unité 1, est constituée de –supposons par exemple– cinq probabilités ou parties, dont trois militent pour qu'un événement existe ou se produise, les autres s'y opposant : nous dirons que cet événement a 3/5 a, ou 3/5 de certitude (…). Est moralement certain ce dont la probabilité égale presque la certitude intégrale, de telle sorte que le manque soit imperceptible ; au contraire est moralement impossible ce qui n'a de probabilité que ce qui manque pour être moralement certain de la certitude entière".

[5] Lettre de Leibniz à Thomas Burnett, 11 février 1697, Hanovre. Dans Journal Electronique des Probabilités et des Statistiques, vol. 2, n°1, juin 2006.

Mais Leibniz va au-delà en unissant le calcul des probabilités à l'*ars combinatoria* : lorsqu'un événement a des probabilités différentes selon les hypothèses qui sont également probables, la probabilité de l'événement résultera de la moyenne entre les différentes probabilités. Il s'agit de la règle de la probabilité totale comprise comme la somme des probabilités simples que Leibniz identifie à la *prostaphérèse*, c'est-à-dire un procédé trigonométrique permettant de remplacer la multiplication par l'addition et la soustraction (donc l'ancêtre du logarithme).[6]

Mais Leibniz n'a pas fait que cela ; sa grande intuition a été l'application du calcul des probabilités à la méthode inductive, c'est-à-dire à l'inversion de l'ordre déductif direct, ce qui est utile surtout en droit dans le raisonnement indiciaire (Rosoni 1995 p. 263).

3. LA LOGIQUE PROBABILISTE CONÇUE COMME JURISPRUDENCE NATURELLE

Nous venons de voir en bref quelles sont les caractéristiques essentielles de la notion de probable chez Leibniz. Mail il faut se demander où enfonce les racines cette notion.

Dès son enfance, Leibniz entre en contact dans la bibliothèque paternelle avec des textes de droit romain. A seulement vingt ans, il obtint son diplôme de jurisprudence à l'université de Altdorf, avec une thèse de doctorat intitulé *De casibus perplexis in jure* ; la même université lui offre une place de professeur. Et on peut noter qu'il a travaillé, toute sa vie, comme juriste.

Ces rappels à des points particuliers de la vie de Leibniz n'ont pas une fonction seulement biographique : l'éducation juridique du Philosophe restera toujours une composante essentielle non seulement dans sa vie, mais aussi (et surtout) de sa conception de la logique probabiliste.

Le processus judiciaire apparaît à Leibniz comme la meilleure tentative de résolution des controverses en matière de décision. La logique juridique, donc, est par sa nature même à considérer comme la véritable logique du probable, à la différence d'une logique de la nécessité, caractéristique des sciences mathématiques. Et lorsque l'avocat Leibniz a compris au fond le rôle incontournable de la théorie de la probabilité dans le champ pratique, il a commencé à parler de *jurisprudence naturelle*.[7]7

[6] Leibniz (1990 p. 290) : "Le fondement sur lequel on a bâti revient à la prosthaphèrese, c'est à dire à prendre une moyenne arithmétique entre plusieurs suppositions également recevables. Et nos paysans s'en sont servis il y a longtemps suivant leur mathématique naturelle. Par exemple, quand quelque héritage ou terre doit être vendue, ils forment trois bandes d'estimateurs ; ces bandes sont appelées *Schurzen* en bas saxon, et chaque bande fait une estime du bien en question".

[7] Lettre de Leibniz à Thomas Burnett, 11 février 1697, Hanovre. Dans *Journal Electronique des Probabilités et des Statistiques*, vol. 2, n° 1, juin 2006 : " (…) il faut une Métaphysique ou Théologie naturelle démonstrative, et il faut aussi une Dialectique morale, et une *Jurisprudence Naturelle,* par laquelle on

Leibniz avait compris (et c'est celle-ci un de ses intuitions géniales), que c'était la jurisprudence à ouvrir la route à la probabilité et non l'envers, comme on peut facilement le croire.

La logique des probabilités que Leibniz veut construire, est différente de la logique classique qui est la logique du certain, parce-que la première veut constituer une *science du réel* et non des vérités nécessaires. Il est important souligner que la conception de Leibniz de la probabilité naît de ses études en matière de preuve juridique, bien qu'il appartienne à une génération de penseurs très critiques envers la vieille logique, mais aussi envers la jurisprudence traditionnelle du droit commun. La volonté de révolutionner la logique juridique, ou pour mieux dire, de la fonder, doit s'appuyer pour Leibniz sur la constatation qu'il est indispensable de partir du droit romain qui déjà possédait une famille complète de règles de classification d'éléments d'évidences. Il n'est pas rare retrouver cette même position dans le XVIII siècle entre les juristes et les philosophes du droit lesquels, en se battant contre le désordre normatif, insistent sur l'exigence de la codification, en aspirant à convertir le droit naturel en droit positif en dégagent du système juridique existant ce qui est déjà conforme au modèle idéal. Mais dans le cadre du jusnaturalisme moderne, il n'y a pas univocité de jugement sur la jurisprudence romaine.[8]

Bref, pour Leibniz la logique n'est pas étrangère au droit, bien au contraire, dans les *Nouveaux essais,* il affirme : "Toute la forme des procédures en justice n'est autre chose en effet qu'une espèce de logique, appliquée aux questions de droit". Cela place le philosophe dans une position tout à fait nouvelle car, par rapport à ceux qui s'intéressaient seulement aux jeux, il veut établir les fondements philosophiques d'une nouvelle logique qu'il fallait rapprocher de la théorie de la déduction. C'est pour cela qu'à partir de Leibniz on peut vraiment commencer à parler de logique juridique[9] conçue

apprenne démonstrativement la manière d'estimer les degrés des preuves. Car plusieurs arguments probables joints ensemble font quelquefois une certitude morale, et quelque fois non. Il faut donc une méthode certaine pour le pouvoir déterminer (…)."

[8] Voir à ce propos la lettre de Leibniz à Spanheim, 26 octobre 1703, dans Leibniz (1995) : " Je voudrais faire en quelque façon ce que les auteurs qui écrivent du droit de la nature et des gens sans être jurisconsultes, ont fort négligé, c'est de le mettre en parallèle avec le droit romain. Et cette comparaison m'a donné des vues qui ont échappées à monsieur Hobbes et à monsieur Pufendorf, et à d'autres qui n'ont pas assez consulté ces grands hommes dont les digestes nous ont conservé les fragments, et qui ne s'éloignent pas tant du droit naturel qu'on pense, et en ont eu assurément une profonde connaissance, de sorte que de vouloir écrire en géométrie sans connaître ni Euclide, ni Archimède".

[9] Le terme "logique juridique" est apparu au début du XVIIe siècle. Le premier à l'employer semble avoir été Martinus Schickhardus auteur d'une *Logica juridica* datée de 1615, qui rompt avec les expressions antérieures de "dialectique légale" ou de "topique légale" pour affirmer la volonté d'une logique émancipée par rapport à la logique aristotélicienne. Depuis, des auteurs de plus en plus nombreux le reprennent, surtout pour se référer à une logique juridique basée sur les catégories de la rhétorique ; c'est le cas, par exemple, de Perelman et de son école. Tout efois, le premier à avoir écrit pour combler une lacune dans ce champ est Cyprianus Regnerus, auteur d'une *Demonstratio logicae Verae Iuridica.* En effet, personne avant Regnerus, n'avait pensé à tirer profit, dans le champ de la jurisprudence, de la

en un sens moderne, c'est-à-dire comme étude du raisonnement des juristes ayant le but de créer une "axiomatique de la contingence" ayant, finalement, un but réformateur et éthique visant à l'amélioration des conditions de vie des individus.

4. PROBABLE, DROIT, LANGAGE UNIVERSEL, LOGIQUE DE LA VISION

Dans le visionnaire projet de Leibniz, ne pas avoir rejoigné la certitude démonstrative typique des mathématiques, dans les champs du contingent, n'est qu'un défaut d'application. La théorie de la probabilité, en regardant à l'exemple offert par le droit qui possède une composante objective très forte qui fait que leurs arguments soient des vraies démonstrations qui peuvent être considérée une extension de la logique générale, doit servir justement à guérir cette fracture.[10] Leibniz indique aussi ses inspirateurs et signale Antoine De Méré, Blaise Pascal, Christian Huygens, Jan de Witt. Les prémisses de la nouvelle logique juridique se basent pour Leibniz sur l'insuffisance des vieilles notions de vrai et de faux et sur la construction d'une *logica probabilitatum* à travers un examen rigoureux des conditions en termes juridiques.[11]

---

dialectique ramienne qu'il utilise comme synonyme de logique et il diffère des penseurs du XVIIe siècle, tel Leibniz, par l'absence de toute référence à la logique des normes. Regnerus et les penseurs de sa génération conçoivent la logique à la manière de Pierre de La Ramée, c'est-à-dire comme un ensemble de règles (*canones*) fondées sur la dialectique."

[10] Leibniz (1990 p. 292) : "De plus, on peut dire que les jurisconsultes ont plusieurs bonnes démonstrations; surtout les anciens jurisconsultes romains, dont les fragments nous ont été conservés dans les Pandectes. Je suis tout à fait de l'avis de Laurent Valle, qui ne peut assez admirer ces auteurs entre autres parce qu'ils parlent tous d'une manière si juste et si nette et qu'ils raisonnent en effet d'une façon qui approche fort de la démonstrative, et souvent est démonstrative tout à fait. Aussi ne sais-je aucune science, hors de celle du droit et celles des armes, où les Romains aient ajouté quelque chose de considérable à ce qu'ils avaient reçu des Grecs."

[11] Les conditions sont de quatre types et ont été résumées par le schéma qu'a proposé Schepers (1975), vol. IV, pages 12-13) : "Conditio est

1. nondum vera
pendet conditio
Conditio falsa indeterminata
Conditio possibilis
Pendet conditio ante eventum
Conditio incerta efficit jus conditionale
1. aliquando vera
Existit conditio
0. Conditio vera indeterminata
1. Conditio per consequens necessari
2. Si conditio existit, dispositio purificatur
2. semper vera
Conditio vera determinata
Conditio necessaria
Conditio necessaria facit jus purum
Si conditio est necessaria, dispositivo est pura

Cette “mathématisation” doit se faire par sa constitution en *système*. Celui-ci doit posséder un langage universel qui soit compréhensible par tout le monde : ceci est le langage par *signes*[12] grâce auquel on peut finalement fermer les portes aux lieux topiques, aux “argumenta” qui ne peuvent pas posséder la composante universaliste inhérente au langage symbolique.

Bref, si pour le volé mathématique des probabilités, il faut certainement poursuivre l’examen des jeux de hasard, pour construire un nouveau type de logique, une logique inventive, il faut étudier les exemples provenant du droit.

Il faut tenir toujours présent à l’esprit le fait que le projet de construction d’une logique probabiliste modelée sur la jurisprudence, rentrait dans le projet plus ample de construction d’une langue universelle, d’une *alphabetaria revolutio*; projet par lequel Leibniz se propose de construire un *langage universel et formalisé* capable d’appliquer, même en droit, l’*ars inveniendi*, c’est à dire l’art de la découverte.

---

3. nunquam vera
0. defecit conditio
1. Conditio falsa determinata
2. Conditio impossibilis

Conditio impossibilis efficit jus nullum
3. Cum conditio fit impossibilis, deficit
4. Si conditio deficit, dispositivo vitiatur

Selon la condition impossible, contingente ou nécessaire, le droit est inexistant, conditionnel ou absolu. En considération de cela, définitions et théorèmes sont selon les cas, placés en relation à des situations juridiques spécifiques. De plus, le Philosophe suggère l’attribution d’une valeur numérique à chacun de ces trois cas en croyant que le magistrat qui doit examiner un cas, puisse finalement recourir au calcul pour former ses jugements : l’unité pour le *jus parum*, le zéro pour le *jus nullum* et une fraction ½ qui représente n’importe quelle fraction entre 0 et 1 pour le *jus conditionale*.

[12] La notion de signe assumera une importance fondamentale à l’âge classique, lorsque le signe en viendra à signifier un signifiant concret par rapport à un signifiant abstrait. Grâce aux signes, la combinatoire et la probabilité pourront arranger de multiples manières, les penseurs de l’âge classique veulent simplifier le raisonnement qui, réduit à une dimension visible et pas seulement auditive, serait plus conforme à la volonté de réduire en système la nature corrompue par le désordre d’une pensée sans signes. C’est justement là un des buts de la logique juridique moderne qui donne l’occasion aux théories mathématiques de la probabilité, de devenir l’expression écrite de la jurisprudence conçue comme logique naturelle. Le signe donne donc la possibilité à la théorie de l’argumentation juridique d’entrer dans une dimension représentative qui permet à la parole de sortir de sa dimension exclusivement auditive et sonore pour devenir représentation visuelle, c’est-à-dire calcul. L’entrée du signe dans la modernité, a comme but de réduire à un système élémentaire de signes, un système complexe d’arguments qui équivaut à transformer les théories de l’argumentation juridique, en système de logique juridique par l’art combinatoire. La théorie du signe qui est née sur le terrain empirique du droit, a été ensuite transférée sur le terrain de la logique tout court où on trouve expliquée la fonction des termes εικός, σημεῖον, τεκμήριον. Il est donc indispensable de bien comprendre la signification de ces termes pour bien comprendre la démarche historique et philosophique de la logique juridique, mais aussi de la logique classique en général. Pour une reconstruction historique de la notion de signe voir Maierù (1981).

Le rêve leibnizien de créer un langage universel et formalisée, capable de freiner les disputes philosophiques à l'aide du simple calcul, s'inscrit bien dans le panorama philosophique du XVIIe et XVIIIe siècle, mais son projet n'était pas limité au champ logique : il intégrait l'étude des langues historico-naturelles. En général, au XVIIe et XVIIIe siècle, on juge de la supériorité des langues artificielles, c'est à dire scientifiques, sur les langues naturelles, dont le progrès perfectionnerait notre art de penser. Ceci s'oppose à ce qui pensait Descartes qui, dans sa lettre à Mersenne du 20 novembre 1629 avait estimé que ce rêve resterait irréalisable. Leibniz connaissait cette lettre et, vu les progrès de l'informatique d'aujourd'hui, on lui donnerait plutôt raison.

La langue universelle suppose certains postulats indispensables (Gensini 1995) :

- L'homme est universel par sa raison, donc il existe aussi une logique universelle.
- Cette Logique doit pouvoir se traduire en langage universel.
- Les mots sont des signes. Seulement le signifiant peut différer selon les langues ; le signifié, c'est à dire l'idées, doit par contre être le même pour tous les hommes.
- Toutes les idées complexes impliquent des idées simples. Telle est la condition d'une langue universelle. Leibniz va partir de la langue la plus universelle pour les savants au XVIIe et XVIIIe siècle : le latin. Il va donc essayer de réduire le latin au plus simple : une seule déclinaison, une seule conjugaison, un seul genre, un seul nombre, etc.
- Pour construire cette logique, il devient alors nécessaire de l'éloigner de la dialectique aristotélicienne des *Topiques* et d'adopter une méthode rigoureuse et démonstrative.

Cette visée relève de l'incontournable influence de Pierre de La Ramée sur la pensée de Leibniz. Comme La Ramée (1543) Leibniz aussi tient pour inutile la logique aristotélicienne accusée de créer deux logiques, même s'il n'en existe qu'une et d'avoir "vulgarisé" la logique en s'appuyant non pas sur les lieux logiques, mais sur les lieux communs.[13]

La conception de la dialectique à laquelle Pierre de La Ramée s'inspire, est celle de Rudolph Agricola, dont la contribution décisive de la dialectique à la science juridique est désormais unanimement reconnue, au point qu'on peut sans doute affirmer que tout traité de dialectique légale du XVIe siècle, n'est qu'une imitation de celui de Agricola. Agricola dans son *De inventione Dialectica* (1529) a commencé à

[13] Leibniz (1995 p. 368) : "J'ai dit plus d'une fois qu'il faudrait une nouvelle espèce de logique, qui traiterait des degrés de probabilité, puisque Aristote dans ses *Topiques* n'a rien moins fait que cela, et s'est contenté de mettre en quelque ordre certaines règles populaires, distribuées selon les lieux communs, qui peuvent servir dans quelque occasion où il s'agit d'amplifier le discours et de lui donner une balance nécessaire pour peser les apparences et pour former là-dessus un jugement solide".

séparer dialectique et rhétorique parce que, selon lui, la rhétorique traditionnelle avait contaminé toute la théorie de l'invention dans le domaine général de la logique. Dans ce nouveau système, il n'y a plus aucune différence entre les *loci* de la rhétorique et ceux de la dialectique. La nouvelle dialectique développe les *loci* d'un point de vue logique mais, paradoxalement, à partir de là, on commence à assister à une dévaluation progressive de la rhétorique et à une subordination conséquente de cette dernière à la dialectique. C'est à partir du moment où Agricola identifie les *loci* de la rhétorique et de la dialectique, que commence à se dessiner l'irréversible fracture entre logique et rhétorique qui a caractérisé toute la période moderne. Et c'est justement à partir de cette fracture philosophique qu'on a conçu le raisonnement juridique comme schéma syllogistique et la rhétorique comme théorie de l'*ornatus,* car le but que poursuit la dialectique est de réduire au syllogisme tout type de raisonnement. On peut sans doute affirmer, avec Perelman (1958) que c'est cette fracture qui a préparé tout le rationalisme moderne.

Dans le projet visionnaire de Leibniz, contenu déjà dans la *Dissertatio de arte combinatoria* (1666), qui prend corps à partir des lectures des *Elementa philosophiae* (1655) de Thomas Hobbes, la volonté de jeter les bases d'une nouvelle logique qui doit désormais répondre aux exigences d'une logique de la découverte apparaît évidente. Déjà Hobbes affirmait que "*ratiocinatio est computatio",* raisonner c'est calculer ; mais Leibniz pousse bien plus loin cette idée et sa conception de la logique se révèle bien plus complexe : avec lui on passe de la syllogistique démonstrative à la logique de l'invention. Pour Leibniz, il s'agit de créer un véritable alphabet des pensées en appliquant l'*ars combinatoria* (combinaison de deux ou plus éléments) pour créer un *calcul ratiocinator* où les concepts sont des *signes* et les raisonnements un pur calcul logique. Même la plus grande invention de Leibniz, c'est à dire le calcul infinitésimal, consiste en effet à représenter par des signes appropriés des notions et des opérations qui n'ont plus rien d'arithmétique. On peut donc affirmer que le calcul infinitésimal n'est qu'un échantillon, le plus réussi, de la *Caractéristique universelle.*

Dans la perspective plus spécifiquement logique, le projet concernait la possibilité de créer un rapport visuel et silencieux entre les signes et les idées grâce à la recherche de systèmes d'écriture dégagés des langues naturelles, dans le but de construire un calcul logique sur le modèle de l'algèbre. Dans le III livre des *Nouveaux Essais*, paragraphe 2, Leibniz se pose le problème du naturel dans les langues et il parle de "pensés sourdes" pour marquer, en algébriste, son souci de se concentrer plutôt sur les fonctions que sur le sens des termes car, l'origine des langues se trouve dans le désir de nous faire entendre. Ce calcul logique substitué à la langue parlée aurait eu beaucoup d'avantages (Coutourat 1901 ; Capozzi 2009) :

- Un avantage pour la mnémotechnique, comme déjà Descartes avait dans les Regulae avait compris, et pour notre sûreté, car les signes écrits aident à se souvenir et aucun malin génie ne peut nous tromper en les altérant.

- Un avantage pour l'intellect qui peut se représenter simultanément une série de pensées différents qui peuvent être réunis par les signes.

- Un avantage pour l'élaboration et l'examen des raisonnements, car la caractéristique possède le moyen de fixer le raisonnement, en le contraignant à laisser des traces visibles sur le papier que nous pouvons consulter partout et quand nous le désirons.

- Un avantage qui provient du non-recours aux langues ordinaires lesquelles, bien qu'étant très utiles au raisonnement, sont néanmoins sujettes à des équivoques, danger qui n'appartient pas aux signes algébriques et arithmétiques où tout raisonnement est une combinaison de symboles et où une erreur n'est qu'une simple erreur de calcul.

Bref, ce qu'échappait à l'imagination, maintenant est disponible grâce aux signes qui fonctionnent comme des "images vides" de contenus représentatifs ; ils consent de *dépasser l'imagination en s'appuyant sur elle*. Ces opérations symboliques, évitent de surcharger le cerveau au-delà de ses naturels limites biologiques, et lui donnent plus pouvoir.

Leibniz reprochera à ce projet de langue universelle de poser son fondement dans un arbitraire radical. Pour Leibniz, si une langue universelle est possible, ce n'est qu'à condition de refléter les opérations intellectuelles. C'est à cause de ceci que le projet de Leibniz apparaît comme une tache infinie et utopique. Cette difficulté avait été entrevu déjà par Descartes en 1629, comme le témoigne une lettre à Mersenne qui Leibniz dépasse en affirmant que cette langue universelle si dépend d'une "vrai philosophie", elle ne dépend pas, pour autant, de "sa perfection". Entre création d'une *Characteristica* e réalisation de la philosophie, il y a un rapport d'échange et d'enrichissement réciproque. C'est cet aspect qui fait que le rêve leibnizien presque accompli par Frege (1879) avec son *Idéographie* et, avant lui, par George Boole qui a le grande mérite d'avoir démontré que la déduction logique pouvait être traitée comme une branche de la mathématique, où il propose une notation dont les signes ne représentent pas des phonèmes mais qui soient fonctionnels à une langue symbolique adressée à l'œil, pas à l'oreille; toutefois, dans le système de Frege, ses déductions sont insupportablement difficiles et longues.

Pour toutes ces raisons, on peut considérer le rêve de Leibniz comme un rêve non accompli, car Leibniz avait imaginé un langage capable pas seulement de tirer des déductions, mais aussi capable de contenir de manière automatique toute vérité de la science et de la philosophie. Deuxièmement, Leibniz avait rêvé d'un langage qui soit aussi un efficace et simple instrument de calcul pour manipuler des symboles.

Ce rêve leibnizien s'inscrit dans la problématique plus ample, propre à la modernité d'une *logique de la vision* inspirée par un langage symbolique modelé sur le langage algébrique que Leibniz présente de manière paradoxale comme une *cogita-*

tio caeca et qui poussera Ploucquet, (1765) auteur au XVIII^e siècle de calculs logiques, à exalter, exactement comme l'a fait Leibniz, les bénéfices de la surdité qui a l'avantage de ne pas emprisonner celui qui n'entend pas, dans les chaînes compliquées des sophismes linguistiques (Capozzi 2009).

Comme on l'a vu, le détachement de la logique des langues ordinaires poursuivi par Leibniz, a trouvé chez Frege une idéale continuité : en effet, la recherche d'une méthode de calcul capable d'établir si dans le système de Frege une inférence était correcte, a fait que dans le 1936 le rêve leibnizien devienne une simple chimère, car on a démontré qu'il n'existe aucune méthode générale de ce genre. Mais c'est à partir de ce résultat négatif que Alain Turing a ensuite découvert qu'on pourrait penser à une "machine universelle" capable de calculer toute seule n'importe quoi. Une nouvelle qui aurait procuré une grande joie à Leibniz.

Ce projet leibnizien qui a eu un énorme retentissement, comme on peut le juger des progrès de l'informatiques qui donneraient raison au rêve de Leibniz, témoigne aussi de son intérêt pour les langues, en particulier pour la grammaire exposée par les logiciens de Port-Royal dans leur *Logique* (1662), qui trouve ses racines lointaines chez Raymond Lulle (1235-1315) qui dédia son œuvre à la construction d'une *ars magna*, c'est à dire d'un art universel capable de combiner les principes premiers pour former les principes de toutes les sciences. Cet art combinatoire prétendait être une "algébrisation" des principes rendus en caractères alphabétiques. A travers la combinaison de lettres et de figures, le philosophe majorquin veut créer un instrument de connaissance simple, au service de l'action : *c'est l'Art combinatoire qui, repris par Leibniz, s'apparente à la logistique contemporaine.*

Leibniz dans sa *Nova methodus discendae docendaeque jurisprudentia*e (1667) manifestera la même exigence que Lulle de construire des tableaux (*tabellae*) pour classifier le droit, sur l'exemple de Pierre de la Ramée.[14] Mais comme on vient de le montrer, Raymond Lulle, bien avant Pierre de La Ramée, avait pensé à tirer profit d'une simplification formelle atteinte à travers les lettres de l'alphabet et stimulée par le recours à la mnémotechnique. Sur le plan formel, sa préoccupation était de "symboliser" les quatre figures syllogistiques pour les simplifier et les réduire.[15]

[14] Leibniz (1667 pag. 295) "Les Définitions ou explications des termes juridiques doivent être traitées dans un ouvrage spécial, sans aucun mélange avec des préceptes ou des règles ; cela peut être appelé : classification du droit (*Partitiones juris*). Que la méthode n'en soit pas alphabétique, mais précise et entière (*accurata et solida*). Il est à remarquer en effet que dans une méthode entière et naturelle la chose expliquera la chose et que la mémoire en sera secourue. Les tableaux (*tabellae*) sont très commodes dans ce domaine et il faut que d'un seul regard (*uno obtutu*) toute la connaissance soit d'abord disposée dans un tableau général, comme sur une carte géographique ensuite on fera le tour en particulier de chaque province (*singulas quasi provincias lustrare*)."

[15] Lulle (1996 p. 220) nous donne un exemple parfait d'*ars combinatoria*:

5. CONTINUITE ENTRE LOGIQUE ET RHETORIQUE CHEZ LEIBNIZ

L'autre aspect qui est à fondement du projet philosophique de Leibniz de création d'une véritable logique juridique, mais qui est aussi un tournant décisif dans la philosophie moderne, est la question de la continuité entre logique probabiliste, rhétorique et dialectique.

Pour comprendre les rapports, j'oserais dire "tendus", qui existent entre logique et rhétorique, il faut avant tout considérer la source d'où tire origine la logique aristotélicienne et quel but Aristote lui assigne, pour démontrer que, dès sa naissance, la logique a exploré l'immense région de la pensée non formalisée. La logique est née, justement, de l'exigence de *développer une logique de l'argumentation non-déductive et de la découverte*. La limite de la position d'Aristote réside dans le fait de ne pas avoir réussi à émanciper la théorie de l'*eikos* (le probable) qui reste confinée dans cette logique mineure constituée par la rhétorique-dialectique.

A l'âge moderne, La Ramée a inauguré le processus fondamental d'émancipation de la rhétorique qui sera au centre du débat logico-probabiliste moderne. La philosophie ramusienne ne répond pas seulement au souhait de fonder une nouvelle philosophie, mais elle constitue aussi le point de départ pour toutes les philosophies qui se succéderont dans les siècles à venir. C'est avec La Ramée, qu'on va glisser de logique classique à une nouvelle théorie de l'argumentation qui fait ses adieux aux créations de la logique aristotélicienne, pour se concentrer sur une nouvelle conception de la méthode, de la dialectique et de la rhétorique qui sera à la base de la logique juridique et de la logique probabiliste du XVIIe et du XVIIIe siècles qui ne verront pas une discontinuité entre rhétorique et logique, en reconnaissant à la rhétorique une double fonction: *persuasive* et *euristique*.

La même tentative d'application de l'art combinatoire au domaine du droit conduit Leibniz, en 1667, à mentionner La Ramée dans la *Nova methodus discendae docendaeque jurisprudentia*e. Décisive chez Leibniz est plutôt l'influence du ra-

---

BC	CD	DE	EF	FG	GH	HI	IK
BD	CE	DF	EG	FH	GI	HK	
BE	CF	DG	EH	FI	GK		
BF	CG	DH	EI	FK			
BG	CH	DI	EK				
BH	CI	DK					
BI	CK						
BK							

Dans la deuxième colonne, il manque un couple qui aurait dû être CB, mais dans la première colonne figure le couple BC, dont les lettres sont inversées. On peut donc éliminer CB. Dans la troisième colonne il manque les couples BC et DC, mais dans les colonnes précédentes, figurent déjà BD et CD. Dans la quatrième colonne, il manque les couples EB, EC, ED, mais dans les colonnes précédentes, nous trouvons déjà BE, CE, DE, etc.

misme allemand et d'auteurs tels que Bisterfeld,[16] Alsted, Jungius, qui enrichissent beaucoup l'aspect théorique des "lieux" et qui préparent à Leibniz un vaste horizon spéculatif où placer ces concepts-clés.

Avec ces concepts, nous touchons autant la métaphysique que la logique : or, c'est bien là l'ancrage de cette conception opérationnelle logique de la dialectique de Leibniz qui prend son sens, et ne perd pas son sens, que d'un concept métaphysique de la dialectique qui en inspire toutes les opérations.[17]

Le surnom d'"usuraius" donné à Pierre de La Ramée, est du au fait qu'il conçoit la logique comme répondant, désormais, au critère d'utilité et moins comme une chaîne parfaite de syllogismes déductifs ; plutôt comme un *art de penser* dirigé vers la résolution des problèmes de la vie réelle.[18]

Leibniz, préoccupé de défendre la connexion existante entre logique et rhétorique, a publié en 1670 le *De principiis* de Mario Nizolio (1553) qui, en opposition à Pierre de La Ramée, voulait substituer le caractère abstrait de la logique avec des pensées liées à la réalité, grâce à la structure grammaticale des langues. Dans cette œuvre il assume une position très nette contre le ramisme qui, selon lui, aurait fait une distinction trop rigide entre rhétorique et art oratoire, sans tenir dans la juste considération l'incontournable rôle logique de la rhétorique. Même en ceci, on peut remarquer le poids majeur des intuitions de Leibniz : tout en rêvant d'un langage visuel, il ne voyait point une discontinuité entre la logique et la rhétorique, laquelle peut compter non seulement sur sa *vis disserendi*, mais aussi sur sa *vis cogitandi* grâce, justement à la stimulation exercée sur elle par la logique.

Même les partisans du modèle algébrique en logique, comme par exemple Lambert, nourrissaient de grands espoirs dans une rhétorique revisitée à la lumière des études sur la mémoire, stimulée par une nouvelle topique et aussi par les apports de la psychologie empirique. La nouvelle rhétorique à l'époque moderne n'a plus pour but la persuasion ; elle se donne un objectif théorique (Capozzi 2009).

Leibniz verra dans Bacon la tentative de dépasser les limites étroites entre rhétorique et science. La topique, selon Bacon, n'a pas seulement la fonction de fournir des arguments dans une dispute basée sur des argumentations probables, mais elle a

[16] Johann Heinrich Bisterfeld liait les *lieux* à la théorie de la *perichóresis* ou *immeatio* considerée dans sa composante logico-gnoséologique opérationelle et de relation ; plûtot que dans la composante ontologico-métaphysique de structure du réel. A Hannover il existe un exemplaire des *Elementorum logicorum libri tres* de Johann Heinrich Bisterfeld (1657), avec en marge des notes manuscrites de Leibniz.

[17] Déjà l'étymologie de *dialectique*, souvent traduit par "discussion", peut nous faire remarquer que le processus dialectique est un processus rationnel, comme le souligne très bien Leibniz. Dialectique fait référence au verbe grec διαλέγησται (dialegesthai): c'est clairement la racine de λόγος qui est la même dans le verbe grec λογίζησται (logizesthai) et même si on traduit l'un par "discuter" et l'autre par "raisonner", les deux termes possèdent une racine commune.

[18] Le témoignage philosophique sans doute plus important du ramisme est la *Logique de Port-Royal* de Nicole et Arnauld (1662).

aussi une précise et importante fonction dans la régulation du développement interne de la pensée.

6. CONCLUSIONS

Ces sont les fondements historico-logiques du lien entre probable, langage, logique de la vision et jurisprudence chez Leibniz, qui se posent donc au fondement d'une vraie algèbre logique, la *Characteristica*, d'un *calcul ratiocinator* applicable à toutes les sciences, y compris la science du droit et la science du langage.

Leibniz a montré que c'est la science du droit qui, la première, a appliqué la logique aux actions humaines et qu'en droit la logique de la vision, c'est à dire la pensée symbolique, est indispensable pour en faire une véritable science. Cette tentative, selon Leibniz, doit passer par la construction d'un langage formalisé qui puisse permettre d'obtenir les mêmes résultats que les mathématiques et qui ne souffrent pas de la même confusion qui emprisonne les paroles en langue naturelle.

Toutefois, ce magnifique projet philosophique n'aboutit pas. Pourquoi ? On peut retracer deux raisons fondamentales de l'"échec" leibnizien (si d'échec on peut parler):

- D'abord, créer la langue universelle impliquerait l'analyse totale de toutes non pensées, opération possible seulement pour Dieu.
- La deuxième raison revient au fait qu'en Dieu la combinatoire est conçue comme une écriture logique. Donc la langue universelle ne peut être parlée parce-qu'elle est écriture de Dieu en qui, seul, il y a coïncidence du sens et du signe écrit entre qui, dans l'idée de Leibniz, existe une séparation ontologique.

Malgré cela, je pense que la chose vraiment importante à considérer du projet leibnizien, soit le but et l'esprit par lequel ce visionnaire projet a été conçu.

La pensée de Leibniz et, plus généralement, la pensée classique, est une "pensée par signes". La tentative de rationalisation à laquelle ont été sujettes les "sciences humaines", comme le droit, a été faite à l'aide de la construction pas si utopique, si on pense aux développements de l'informatique contemporaine, d'un nouveau langage qui avait, au fond, une volonté réformatrice au niveau soit théorique soit pratique. Leibniz devient l'interprète majeur d'une philosophie qui a débuté au XVII^{e} siècle : la philosophie de la représentation dont le signe écrit est l'expression d'une exigence qui vise au dépassement des limites posés par le langage commun. La nouvelle conception binaire du signe sépare désormais le *vu* et le *lu*, le visible et l'énonçable. Pour que le droit devienne une science, il doit s'affranchir de sa dimension orale et argumentative : les choses et les mots vont se séparer, l'œil sera destiné à voir, et à voir seulement ; l'oreille à seulement entendre. Le discours aura bien pour tâche de dire ce qui est, mais il ne sera rien de plus que ce qu'il dit.

Chez Leibniz et ses contemporaines il ne faut pas chercher une vaste architecture épistémologique, telles celles proposés aux cours des siècles suivants, mais y reconnaître la mise en œuvre artisanale d'une sorte de rationalisme appliqué qui, forgé dans l'expérience scientifique de la seconde moitié du XVII[e] siècle, s'inscrit dans la tradition algébrique inaugurée au XVI[e] siècle et gouverné par une hypothèse forte sur la langue des sciences et par conséquent sur l'écriture, sur l'imprimerie et sur la société des savants.

La langue n'est alors rien d'autre qu'un véhicule pour atteindre le bonheur. Les systèmes probabilistes deviennent des systèmes "téléologiques". Il faut créer un nouveau langage compréhensible par tous ; un langage capable de freiner les disputes en matière juridique ; un langage qui soit finalement *démocratique* : ainsi, Leibniz appelle sa *Caractéristique*, avec une expression empruntée par le droit, "*le juge infaillible des controverses*". (Lettre au duc de Hanovre 1690).

En dernière analyse, ce que nous a laissé Leibniz, n'est qu'un grand rêve qui nous remplit d'admiration pour la puissance de sa pensée créatrice.

Dans la capacité de Leibniz à rêver des rêves souvent impossibles, de se poser des questions souvent sans réponse, je crois que réside l'essence la plus profonde de la philosophie. C'est peut-être celle-ci la vraie leçon à apprendre de la *Caractéristique* de Leibniz.

BIBLIOGRAFÍA

AGRICOLA, R. (1529). *De inventione Dialectica Libri tres*. S. de Colines, Paris.

ARISTOTE (1831). *Aristotelis Opera.* Sgg ex recensione I. Bekker, edidit Accademia Regia Borussica, Berolini.

ARISTOTE (1973). *Rhétorique*. Trad. Dufour M et Wartelle A, Les Belles Lettres, Paris.

ARNAULD, A. et NICOLE, P. (1662). *La Logique ou l'art de penser*. Éd. Critique de la V éd., Paris 1683, par P. Clair, F. Girbal, P.U.F., Paris, 1981.

BACON, F. (1887-1892). *Novum Organum.* Dans *The works of Francis Bacon*. Éd. par Ellis R, Spedding J. D. D. Heath, London.

BARONE, F. (1992). *Introduction aux écrits de logique de Leibniz*. Laterza, Bari.

BERNOULLI, J. (1713). *Ars conjectandi*. Birkhaüser, Basel, 1975.

BISTERFESLD, J.H. (1657). *Elementorum logicorum libri tres*. Ex Officina Henrici Verbiest, Lugduni Batavorum.

BOOLE, G. (1847). *The mathematical Analysis of Logic, being an Essay towards a Calculus of Deductive Reasoning.* Macmillan, Barkley & Macmillan, Cambridge. Tr. it *L'analisi matematica della logica*, par M. Mugnai, Bollati Boringhieri, Torino, 1993.

CAPOZZI, M. (2010). *Logica e retorica. Separazione di campi e motivi di continuità fra Seicento e Settecento*. Dans Gagliasso E et Frezza G, *Metafore del vivente*. *Linguaggi e sperimentazione tra filosofia, bios e psiche cognitive,* Milano, Franco Angeli, p. 113-122.

CAPOZZI, M. (2011). *The Cognitive Importance of Sight and Hearing in Seventeenth and Eighteenth-Century Logic.* Dans Cellucci C, Grosholz E et Ippoliti E éd., *Logic and Knowledge*, Newcastle, Cambridge Scholars Publishing, p. 3-25.

COUTURAT, L. (1901). *La Logique de Leibniz, d'après des documents inédits*. Alcan, Paris.

DASCAL, M (1987). *Leibniz, Language, Signs and Thought*. Benjamins, Amsterdam-Philadephia.

DAVIS, M. (2012). *The Universal Computer. The Road from Leibniz to Touring*. CRC Press, Boca Raton.

DESCARTES, R. (1966). *Oeuvres et lettres*. Textes présentés par Bridoux A, Gallimard, Paris.

FAVARETTI CAMPOSAMPIERO, M. (2007). *Filum cogitandi: Leibniz e la conoscenza simbolica*. Mimesis, Milano.

FREGE, G. (1879). *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildeten Fremdsprache des reinen*. Denkens, L. Nebert, Halle a. S. Trad. it. *Ideografia* dans G. Frege, *Logica e aritmetica*, par C. Mangione, Boringhieri, Torino, 1967.

GENSINI, S. (1991). *Il naturale e il simbolico: saggio su Leibniz*. Bulzoni, Roma.

GENSINI, S. (1995). *Leibniz e le lingue storico-naturali*. Dans Leibniz (1995), pages 3-44.

GIAQUINTO, M. (2007). *Visual Thinking in Mathematics: An Epistemological Study*. Oxford University Press, New York.

HOBBES, T. (1655). *Elementa Philosophiae*. Vrin, Paris, 2000.

KNOBLOCH, E (1976). *Die mathematischen Studien von G. W. Leibniz zur Kombinatorik : Textband / im Anschluss an den gleichnamigen Abhandlungsband zum ersten Mal nach den Originalhandschriften hrsg. von Eberhard Knobloch.* Steiner, Wiesbabaden.

KNOBLOCH, E (2004). *Leibniz and the Use Of Manuscripts: Text As Process.* Dans K. Chemla éd. *History of Science, History of Text*. Dordrecht, Springer 2004, pages 51-79.

LEIBNIZ, G.W. (1875-1890). *Die philosophischen Schriften*. Hrsg. C. I. Gerhardt, 7 voll., Weidmann, Berlin [réed. Olms, Hildesheim-New York 1960 et suivants].

LEIBNIZ, G.W. (1667). *Nova methodus discendae docendaeque jurisprudentiae*. Réed. dans *G. W. Leibniz Philosophische Schriften herausgegeben von Preusischen Akademie der Wissenschaften,* I Bd., 1663-1667, Darmstadt, 193.

LEIBNIZ, G.W. (1903). *Opuscules et fragments inédits: extraits des manuscrits de la Bibliothèque royale de Hanovre*. Couturat L, éd. Paris, Germer Baillière [réed. Hildesheim: Olms, 1988].

LEIBNIZ, G.W. (1990). *Nouveaux Essais*. Durchges. Nachdr. der Erstausg, Berlin.

LEIBNIZ, G.W. (1995). *L'armonia delle lingue*. Textes choisis, introduits et commentés par S. Gensini, préfaction de T. De Mauro, Laterza, Roma-Bari.

LEIBNIZ, G.W. (2002). *Des conditions*. Introduction, traduction et notes par Boucher P, Vrin, Paris.

LULLE, R. (1721-1742). *Opera Omnia*. Mainz, réed., Minerva, Frankfurt am Main, 1965.

MAIERU, A. (1981). *"Signum" dans la culture médiévale*. Dans *Sprache und Erkenntnis in Mittelalter,* Berlin/New-York, Walter de Gruyter, p. 51-71.

NIZOLIO, M. (1553). *De principiis*. Par Rossi P, Bocca, Roma-Milano, 1953.

PALERMO, A. (2012). *Logique, probabilité et rhétorique dans l'argumentation juridique*. *Revue de synthèse*, tome 133, 6e série, n° 3, 2012, pages 1-26.

PERELMAN, C. et OLBRECHTS-TYTECA, L. (1958). *Traité de l'argumentation : la nouvelle rhétorique*. Presses universitaires de France, Paris.

PLOUCQUET, G. (1765). *Untersuchung und Abänderung der logikalischen Constructionen des Herrn Prof. Lambert.* Tubingae, in Bök, 1766.

RAMEE DE LA P. (1543). *Dialecticae institutiones aristostotelicae animadversiones*. Iacobus Bogardus, Paris. Par Wilhelm Risse, Stuttgart-Bad Cannstatt, Frommann, 1964.

REGNERUS, C. (1638). *Demonstratio Logicae Verae Iuridica*. Lugduni Batavorum. Édité par Kalinowski G. CLUEB, Bologna, 1986.

ROSONI, I. (1995). *Quae singula non prosun collecta iuvant : la teoria della prova indiziaria nell'età medievale e moderna*. Giuffré, Milano.

SCHEPERS, H. (1975). *Leibniz' Disputationen "De Conditionibus: Ansätze zu einer juristischen Aussagenlogik*". Dans Akten des II. Internationalen Leibniz-Kongresses, Hannover, 17.-22. 6. 1972, Bd. IV. Studia Leibnitiana Supplementa 15. Steiner, Wiesbaden 1975.

CAPÍTULO 18

DIFERENCIACIÓN Y DEMARCACIÓN: INSTITUCIONALISMO, SOCIEDAD ECONOMÉTRICA Y LA COMISIÓN COWLES (1930-1960)[1]

CAMILA OROZCO ESPINEL
EHESS (París)

1. INTRODUCCIÓN

Kenneth Arrow, en su presentación para la celebración del 50º aniversario de la Comisión Cowles, *Cowles en la historia del pensamiento económico,* comienza preguntándose: "¿en qué sentido podemos aislar la contribución de cualquier individuo o institución en el desarrollo del análisis económico?" Su respuesta: "ninguna institución de investigación es una isla entera en sí misma" (Arrow, 1983, p. 1). Tras la paráfrasis de la XVII Meditación de John Donne[2], Arrow continua: "Cowles no es y no fue un grupo aislado dentro de la *corriente dominante de la Economía*, sus contribuidores se encuentran hoy inextricablemente mezclados con *otras* corrientes*"*[3].

---

[1] Esta es una versión preliminar e incompleta de un artículo que estoy preparando como parte de mi trabajo de doctorado. Agradezco a Daniel Trujillo por la ayuda con la preparación de la versión en español.

[2] La XVII Meditación fue publicada en 1624 en *Devotions upon Emergent Occasions*. El canto original en inglés es: "No man is an island, entire of itself; every man is a piece of the continent, a part of the main. If a clod be washed away by the sea, Europe is the less, as well as if a promontory were, as well as if a manor of thy friend's or of thine own were: any man's death diminishes me, because I am involved in mankind, and therefore never send to know for whom the bell tolls; it tolls for thee".

[3] No lleva énfasis en el original.

En este artículo, argumento que, aunque nunca aislada y a pesar de que sus contribuciones al análisis económico (o mejor, debido a ello) están inextricablemente mezcladas con aquellas de *otras corrientes*, Cowles dibujó y reforzó límites *específicos* de lo que Arrow en 1983 en su presentación llamó con acierto la *corriente dominante de la Economía*. Singular e identificable, el trabajo de demarcación de Cowles fue particularmente importante por dos motivos. Por un lado, atribuyó características exclusivas a la *ciencia económica* que efectivamente diferenciaron la *corriente dominante* del Institucionalismo, dando razones para su legitimación. Por otro lado, participó en la construcción de la estructura institucional-disciplinar que mantuvo la hegemonía de la *corriente dominante* a lo largo de la segunda mitad del siglo XX.

Este artículo se refiere a *delimitación* en el sentido de Thomas Gieryn (Gieryn, 1983, 1995, 1999), esto es, como un problema práctico para los científicos cuando están confrontados a: 1) la diferenciación entre ciencia y otras actividades intelectuales (como el arte, la religión y el folklore); 2) la confrontación entre definiciones rivales de ciencia; y 3) la separación entre la producción del conocimiento científico y su utilización por no científicos (el gobierno y la industria, pero también ingenieros o técnicos)[4]. Este artículo estudia la confrontación entre dos aproximaciones rivales a la Economía: el Institucionalismo y la *corriente dominante*.

La diferenciación que aquí se examina —concretamente las prácticas— dibujó los límites de lo que debía entenderse como auténticamente científico y lo que no. Dicho de otro modo, de lo que debía entrar y lo que debía ser excluido de una forma de hacer Economía considerada *auténticamente* científica. Esto incluía asimismo límites entre quién estaba en el centro de la disciplina y quién ocupaba sus márgenes. Concretamente, entre 1930 y 1960, en el contexto de la Comisión Cowles, se usó una idea de lo que una economía *auténticamente* científica debía ser para empujar el Institucionalismo fuera de sus límites[5]. La Teoría del Equilibrio General de Walras encontró espacio en Estados Unidos dentro de estos límites, y fue fundamental para dibujarlos y reforzarlos.

Privilegios (p.e., oportunidades materiales) y desventajas (p.e., exclusión de la comunidad científica) están asociados respectivamente a posiciones en el centro y la periferia de la disciplina[6]. Las disputas relacionadas con los límites por la autoridad

[4] Para otros usos del concepto de delimitación en la historia de la economía ver (Fourcade, 2009, pp. 8-9,77-78, 90-93; Mata, 2009; Mirowski, 1999, pp. 690-691).

[5] Académicos de la historia de la economía del siglo XX han mostrado que el ímpetu original de la *economía ortodoxa* en Estados Unidos se encuentra durante los años que precedieron y siguieron inmediatamente la Segunda Guerra Mundial. Los años comprendidos entre 1930 y 1960 constituyeron una coyuntura crítica. Sobre este tema, ver, por ejemplo, (Düppe & Weintraub, 2014; Mirowski & Hands, 1998; Mirowski, 2002b; Morgan & Rutherford, 1998b).

[6] La característica distintiva de las disciplinas modernas es organizar la enseñanza, la investigación y la organización profesional dentro de una unidad institucional del mismo tipo. Hay una coherencia multifuncional entre estas tres dimensiones (Heilbron, 2004). Este artículo se enfoca en la dimensión de la investigación. Sin embargo, todavía hace falta un análisis integrado para entender por completo el proceso de renovación de la economía durante los años que aquí se analizan.

de llamarse a sí mismo científico y las reivindicaciones de la legitimidad asociada a la ciencia no son, entonces, ni un problema analítico puro ni una mera cuestión académica: la diferenciación es un problema práctico que se realiza cotidianamente. Este artículo analiza cómo, durante el preámbulo y la constitución de la Sociedad Econométrica, un grupo de académicos con intereses similares definieron *teoría* de una forma específica. Esta definición excluía ciertos métodos del *repertorio de la Economía auténticamente científica*. Desde la posición de dominación dentro del campo de la Economía estadounidense que ocupaban, estos académicos diseñaron al tiempo una política de membresía para cumplir con esta finalidad.

Es importante tener en cuenta que la diferenciación con respecto al Institucionalismo no fue sino una de las barreras erigidas por la *corriente dominante* entre 1930 y 1960[7]. Su monopolio de la autoridad científica fue el resultado de diferentes —pero mutuamente reforzados— procesos de delimitación y demarcación. Aunque los historiadores de la Economía del periodo de entre y postguerra han resaltado la profunda heterogeneidad entre las corrientes *ortodoxas*, un principio clasificatorio (más que explicativo) ha guiado generalmente los análisis. Por ende, la heterogeneidad, característica constitutiva y elemento decisivo de la explicación del éxito de la *corriente dominante*, ha sido generalmente subestimada. Este artículo busca entonces encuadrar la *corriente dominante* en un marco más incluyente. Aquí, la *corriente dominante* se presenta como un sistema heterogéneo pero coherente, cuyas distintas piezas establecieron límites diferentes, y como resultado, tuvieron funciones diversas en el proceso de monopolización de la autoridad y los recursos científicos. La coherencia del sistema depende del refuerzo mutuo de diferentes procesos de delimitación[8]. Dicho de otro modo, este artículo va un poco más allá en la XVII Meditación de John Donne: *cada institución de investigación es una pieza del continente, una parte de del todo*, pues estudia la *corriente dominante* como un continente compuesto por diferentes piezas y no como una sola *cosa* (se enfatiza el hecho de que los límites fueron dibujados y redibujados a lo largo del tiempo), ni como una isla monolítica (se realza la importancia de las formas ambiguas en las que los límites cambiaron).

La idiosincrasia de Cowles se usa aquí para explicar por qué los académicos que se reunieron alrededor de este centro de investigación trabajaron en límites *específicos*. Al mismo tiempo, el análisis de la delimitación de Cowles enriquece nuestro entendimiento de su idiosincrasia particular y, por tanto, de las distancias, tensiones y consensos con el resto de la *corriente dominante*.

---

[7] Hand y Mirowski (1998, 2006) han argumentado que el panorama intelectual de la posguerra en la economía americana se centró en tres poderosos polos: MIT, Cowles y la Universidad de Chicago.

[8] Este artículo hace parte de un proyecto más amplio que intenta articular el análisis de diferentes procesos de delimitación entre 1930 y 1960. El objetivo es entender la monopolización de la definición de ciencia por parte de la *corriente dominante*, a través del estudio de los límites que tuvieron que ser establecidos para lograr la hegemonía disciplinar. La delimitación es usada como una herramienta analítica y también como una forma de vincular los límites específicos que se estudian aquí. El proyecto se enfoca en tres localizaciones institucionales: La Comisión Cowles, la Universidad de Chicago y MIT.

2. INSTITUCIONALISMO, ORTODOXIA Y SUPERPOSICIÓN

Vale la pena mencionar que en su presentación para el 50º aniversario de Cowles, Arrow utiliza el término *corriente dominante* y no *teoría neoclásica* o *economía neoclásica*[9]. Este acto de clasificar ideas, autores e instituciones es una práctica recurrente del campo científico. El artículo analiza estas prácticas como un proceso de delimitación. Al hacerlo, el contenido de las clasificaciones no necesariamente debe ser presupuesto, y las muchas maneras en que los economistas estadounidenses las usaron pueden ser distinguidas de sus funciones[10]. Esto es particularmente importante debido a que, además de la ya mencionada profunda heterogeneidad entre la *corriente dominante*, los historiadores de la economía estadounidense de entreguerras han confirmado la persistencia de un continuum intelectual que va desde el Institucionalismo hasta la *corriente dominante*[11]. Adicionalmente, existen áreas importantes en las que las aproximaciones institucional y ortodoxa se superponen —incluso después de la Segunda Guerra Mundial—. La bien conocida heterogeneidad del Institucionalismo en ese momento solo refuerza el carácter ambiguo de los límites y la polisemia de las clasificaciones[12].

Los economistas institucionalistas del periodo de entreguerras eran un grupo extremadamente diverso. Como Morgan y Rutherford (1998) señalaron,

el institucionalismo consistía en un grupo de programas de investigación vagamente relacionados, un grupo centrado en ciclos económicos y desempleo, con una agenda de reforma que involucraba algunas nociones de planificación, y otro grupo centrado en las dimensiones legales del mercado, con una agenda de reforma enfocada en derecho laboral y regulaciones de negocios" (p.2).[13]

A pesar de que el Institucionalismo nunca existió como una agenda teórica articulada y bien tejida, los diferentes grupos que lo componían compartieron una actitud distintiva frente a la investigación económica. Derivada de una fuerte creencia en la

---

[9] Para seguir con la anotación de Arrow y resaltar la importancia del proceso de equitación en el campo académico, decidimos usar aquí *corriente dominante*. Esta elección consciente, sin embargo, se usa principalmente para recalcar la heterogeneidad de la *ortodoxia*.

[10] El uso de estas categorías por los historiadores del pensamiento económico es también un objeto de análisis interesante.

[11] Un número importante de personas se encontraron en una posición de compromiso intelectual entre las dos aproximaciones durante el periodo de entreguerras (por ejemplo, Allyn Young); algunas fueron más allá y se convirtieron completamente (como John Bates Clark). Las herramientas desarrolladas por la economía institucionalista también se convirtieron en parte del equipo estándar utilizado durante la segunda mitad del siglo XX (por ejemplo, el trabajo de J.M. Mitchel y Simon Kuznets sobre la contabilidad del ingreso nacional, y el flujo de fondos de Copeland. (Morgan & Rutherford, 1998, pp. 2–3) (Fourcade, 2009, p. 81)

[12] Por ejemplo, Thomas Stapleford (2011) muestra la superposición entre el trabajo de Milton Friedman y las aproximaciones institucionalistas de la economía.

[13] Las raíces del institucionalismo en Estados Unidos se extienden hasta 1880. Sin embargo, solo se volvió un movimiento auto-identificado hasta 1918 (Rutherford, 1997). Este incluía los métodos cuantitativos de Wesley C. Mitchell, las historias documentales y entrevistas de John R. Walton, los casos de estudio de empresas e industrias de Hamilton y la teorización aplicada de John M. Clark.

utilidad del conocimiento económico para el progreso del ser humano y la sociedad, la actitud del Institucionalismo frente a la investigación estaba fundada en una aproximación inductiva —empírica— al estudio de la economía, y en la convicción del carácter insuficiente de un mercado sin regulación. Ambas características intelectuales apuntaban a un objetivo común: crear una teoría basada en suposiciones realistas, y por tanto, capaz de atender asuntos y problemas del mundo real. Esta teoría era para los institucionalistas el resultado de la investigación de condiciones "reales".

Así mismo, y a pesar de su diversidad, los institucionalistas estadounidenses permanecieron asociados estrechamente a la recolección y análisis sistemático de información, más que a los estudios históricos de las instituciones (Ross, 1979, p. 417)[14]. El compromiso de W.C. Mitchell con la identificación de regularidades empíricas a través de la observación cuantitativa detallada es el mejor ejemplo de ello. Su trabajo monumental *Los Ciclos Económicos* (1946), es la quintaesencia de este método.

El análisis de la Economía en Estados Unidos durante el siglo XX como una trayectoria donde el cientifismo sustituyó al historicismo no representa fielmente esta transformación. Por heterogéneos que fueran los grupos y ambiguos los límites en ellos, su diferenciación estaba enmarcada en ideas alternativas de cuantificación (Porter, 1997). "El institucionalismo americano fue desplazado porque su modelo de cuantificación se hizo obsoleto con el ascenso conjunto de la economía matemática y la econometría, que asociaba el empirismo a la formulación explícita y a los exámenes de las teorías económicas" (Fourcade, 2009, p. 84).

Más que un conflicto entre ciencia e historia, lo anterior fue una guerra científica. Concretamente, la delimitación invirtió la jerarquía entre la aproximación inductiva-empírica-estadística y la deductiva-teorética-matemática. Los métodos deductivos se consolidaron progresivamente como dominantes y, a partir de la segunda mitad de la década de los cuarenta, el Institucionalismo comenzó un proceso de rápido declive.

3. LA CONSTITUCIÓN DE LA SOCIEDAD ECONOMÉTRICA: DELIMITACIÓN Y CIMIENTOS

Caracterizado por disputas de delimitación sobre el conjunto de métodos que debían ser considerados *auténticamente* científicos en Economía, el periodo de entreguerras fue también un momento crucial en el cual se estableció la estructura disciplinar necesaria para sostener la hegemonía de la *economía dominante*. El análisis del debate que tuvo su punto más crítico durante los preámbulos de la constitución de la Sociedad Econométrica, institución con la cual Cowles mantuvo una relación simbiótica[15],

[14] Desde una perspectiva comparativa, en su mayoría, los institucionalistas americanos estuvieron menos enfocados en la historia que sus contrapartes alemanas e inglesas (Fourcade, 2009, p. 81).

[15] La fundación de la Comisión Cowles es un episodio bien conocido de la historia de la economía americana. Sobre los inicios de la historia de Cowles, ver, por ejemplo: (Bjerkholt, 2014c; Cowles Commission, 1952; Hildreth, 1986; Mirowski, 2002a).

arroja luces sobre la génesis de este proceso[16]. Analizar este debate como un proceso de delimitación, orientado hacia la reducción del repertorio científico de la Economía y su monopolio por parte de un grupo de académicos con mentalidades similares, es particularmente esclarecedor[17]. El debate hace evidentes elementos relacionados con: 1) la confrontación entre dos repertorios antagonistas, y en su mayoría desarticulados, de métodos científicos: la *corriente dominante* y el Institucionalismo; 2) el uso de la legitimidad de la ciencia para proteger la Economía de intereses políticos, sociales y nacionales; y 3) los cimientos de la estructura que soporta la hegemonía de la *corriente dominante* a lo largo de la segunda mitad del siglo XX.

La Sociedad Econométrica fue fundada en 1930 como iniciativa de Irving Fisher Ragnar Frisch y Charles F. Roos. A finales de la década de 1920, Fisher, Frisch y Roos compartían cierta admiración por el progreso científico hecho en la física como consecuencia de su matematización, así como su escepticismo respecto al estado actual de la Economía en relación a sus pretensiones científicas. De hecho, Frisch veía la mayor parte de su trabajo como la encarnación de la orientación que la investigación de la Sociedad debía seguir para dirigir y promover las ambiciones científicas de la Economía (Bjerkholt, 2014a, p. 3). En junio de 1930, los tres economistas enviaron una primera carta a un grupo de 28 colegas de 10 países diferentes de Europa y América del Norte, para indagar sobre la viabilidad y la mejor manera de llevar a cabo la sociedad académica internacional a través de la cual esperaban desarrollar su proyecto[18].

A pesar de que la diversidad de respuestas es sorprendente, los 28 colegas que recibieron la primera carta, de forma casi unánime, convinieron en la pertinencia general del proyecto[19]. El segundo paso era organizar una reunión con el objetivo de oficializar la fundación de la Sociedad. Para ello, se envió una invitación a 83 personas donde se adjuntaba un borrador del proyecto de constitución de la sociedad[20]. Seis meses después del envío de la primera carta se llevó a cabo la reunión de organización de la Sociedad Econométrica, durante una reunión conjunta de la Asocia-

[16] Para una historia detallada de la fundación de la Sociedad Econométrica, ver Bjerkholt (2014a), Louça (2010), Morgan (1992). Esta sección se basa en el material de archivo presentado por Bjerkholt (2014a).

[17] El carácter desarticulado del grupo es evidente en la respuesta de Schumpeter: "Doy una cálida bienvenida al proyecto de una Asociación Internacional para el Avance de la Teoría Económica. Creo que una organización así podría hacer mucho para coordinar los esfuerzos de muchos trabajadores, de los cuales, la mitad de los frutos se ha perdido debido a su aislamiento. De hecho, cumpliría con un deseo que todos nosotros sentimos fuertemente algunas veces" (en Bjerkholt, p. 14).

[18] Entre las 28 personas que recibieron la carta, se encontraban ocho americanos (T. N. Carver, John B. Clark, John M. Clark, Griffith C. Evans, Mordecai Ezekiel, Henry L. Moore, Warren M. Persons y Henry Schultz), cuatro franceses (Clément Colson, François Divisia, Jacques Moret y Jacques Rueff), tres ingleses (Arthur L. Bowley, A. C. Pigou y John M. Keynes), dos suecos (Gustav Cassel y Bertil Ohlin), un alemán (Ladislaus von Bortkiewicz), un ruso (Eugen Slutsky), dos austriacos (Hans Mayer y Joseph Schumpeter), un danés (Harald Westergaard), un polaco (Wladislaw Zawadski) y cinco italianos (Luigi Amoroso, Umberto Ricci, Pietri-Tonelli, Gustavo del Vecchio y Corrado Gini).

[19] Con la excepción de Cassel, Pigou, Slutsky y Moore (que no aceptaron la invitación por razones de salud).

[20] Aquellos que respondieron positivamente a la primera carta, además de las adiciones a la lista inicial de participantes hechas por demanda de Fisher, Frisch y Roos.

ción Estadounidense de Economía, la Asociación de Estadística de Estados Unidos y la Sociedad Estadounidense de Matemática. Dieciséis personas asistieron, de las cuales seis no habían sido invitadas oficialmente[21]. El borrador del proyecto inicial no fue modificado sustancialmente. El subtítulo “Sociedad Econométrica, una sociedad internacional para el avance de la teoría económica en su relación con la estadística y las matemáticas”, que figura todavía en la cubierta de *Econometrica*, no sufrió alteraciones.

En su carta seminal de junio, Fisher, Frisch y Roos atribuyeron características exclusivas a aquello que debería ser considerado como una Economía *auténticamente* científica. La intención era diferenciar su aproximación de aquello que no consideraban ciencia. Esto es, el trato exclusivamente empírico de problemas económicos, por ejemplo, los métodos estadísticos de los economistas institucionalistas y el énfasis que daban a la recolección de datos. La carta seminal fue sin duda una *enquête* preliminar algo desestructurada, donde se alternaron preguntas muy generales y muy específicas. Sin embargo, desde sus primeras líneas, expresó un proyecto ambicioso de manera explícita:

> *Los que aquí abajo firmamos le escriben para conocer su opinión sobre un proyecto que hemos estado considerando, esto es, la organización de una asociación internacional para el progreso de la teoría económica. Como lo vemos, el principal propósito de esta organización sería ayudar a convertir gradualmente la Economía en una ciencia genuina y reconocida como tal. Este propósito, pensamos, solo puede ser realizado al darle a la asociación un alcance teorético. Únicamente de esta manera, creemos, se puede asegurar que su trabajo procederá de forma desinteresada, exento de prejuicios nacionales, políticos y sociales.* (Carta original citada por Bjerkholt, 2014a, pp. 8-9)

El rasgo distintivo fue un énfasis teorético que dibujaba una línea de separación entre una Economía *auténticamente* científica y el “resto”. La línea, antes que todo, fue un límite que diferenciaba la Economía de la política: una barrera que protegía la Economía de distorsiones motivadas políticamente. La estrategia de delimitación de la pequeña red de académicos que fundaron y se reunieron alrededor de la Sociedad Econométrica, en sus inicios, tuvo como base esta invocación y el uso instrumental de la legitimidad de la ciencia[22]. El significado que se atribuyó al alcance teorético que aseguraba la conversión de la Economía en una ciencia *genuina* fue

[21] Aquellos que fueron invitados: Ragnar Frisch, Harold Hotelling, William F. Ogburn, J. Harvey Rogers, C. F. Roos, Josef Schumpeter, Henry Schultz, W. A. Shewhart, Ingvar Wedervang y Edwin B. Wilson. Los que no fueron invitados, pero que participaron en la reunión: Karl Menger, Frederick C. Mills, Oystein Ore, M. C. Rorty, Carl Snyder y Norbert Wiener.

[22] Como Bjerkholt (2014a, p. 16) subraya, los primeros años de la Sociedad Econométrica fueron más bien modestos. Luego de enviar la carta seminal en junio y recibir algunas respuestas, los organizadores rápidamente avanzaron sin financiamiento y sin mucho más que una lista embrionaria de miembros. Solo 16 de ellos asistieron a la “reunión de organización”, para la cual la invitación había sido enviada con apenas un mes de anticipación.

bastante particular y no estuvo desprovisto de referencias a las ciencias naturales. Esto es evidente en el significado que se acordó en la carta para definir "teoría":

> *La palabra teoría en esta conexión no debe, por supuesto, ser interpretada exclusivamente como sinónimo de razonamiento abstracto, sino también como algo que incluye el análisis de evidencia empírica que sugiere o verifica leyes teoréticas.* (En Bjerkholt, 2014a, pp. 8-9)

Esta definición está basada en la delimitación del repertorio de una Economía *auténticamente* científica, y por ende, es un intento de diferenciación de aproximaciones rivales al conocimiento económico. La separación implica una jerarquía entre una aproximación que combina métodos empíricos y abstractos, y una basada en estudios puramente empíricos —la referencia a los métodos estadísticos institucionalistas, basada en recolección detallada de datos, es inevitable—. Este límite se refuerza en varias oportunidades a lo largo de la carta. Por ejemplo, al delinear la importancia del carácter cuantitativo de la teoría económica, Fisher, Frisch y Roos concluyen:

> *Creemos que la asociación no debería incluir a aquellos que han tratado los problemas económicos de forma exclusivamente empírica, sin referencia a principios teoréticos fundamentales*[23]. (En Bjerkholt, p. 10)

Para los remitentes de la carta,

> *[…] será en buena medida a través de una conexión constante y cercana entre puntos de vista abstracto-racionales y concreto-empíricos que el movimiento cuantitativo moderno en la Economía producirá resultados significativos y duraderos.* (En Bjerkholt, p. 10)

Para ellos, esta conexión solo era posible de realizar a través del

> *[…] pensamiento constructivo y riguroso similar al que ha llegado a dominar en las ciencias naturales.* (En Bjerkholt, 2014a, p. 32)

El carácter estrecho, y por tanto exclusivo, de la definición de teoría promovido por el grupo que organizó la Sociedad Econométrica fue evidente para los que recibieron la carta, especialmente para aquellos comprometidos intelectualmente con ambas aproximaciones. La respuesta de J.M. Clark evidenció esto, primero en relación a los requisitos de membresía:

> *Si la asociación va a representar la teoría en general, y no simplemente una clase de teoría, me parece que no debería seleccionar a sus miembros mediante un*

[23] Vale la pena anotar que a pesar de que la familiaridad con la teoría económica y el conocimiento de matemáticas aplicadas a la economía y a la estadística estaba en primer lugar en la lista de requerimientos para elegibilidad, la familiaridad con el uso de información estadística era el segundo criterio.

> *examen de aptitud para realizar trabajos matemáticos-estadísticos, ni crear una revista comprometida a darle a esta clase de trabajos un lugar dominante. Por el momento, estoy a favor de darle a la sociedad y a la revista un campo de acción mayor.* (En Bjerkholt, p. 15)

Y luego, al responder sobre su propia elegibilidad:

> *Me complacería ser un miembro fundador de una asociación así solo si esta resuelve exitosamente el problema sugerido arriba. Sin embargo, no me inclino a dar mi apoyo a la conquista completa de la "teoría" por un método matemático-cuantitativo; especialmente ya que espero hacer mi trabajo principal en teoría, pero no principalmente en ese campo.* (En Bjerkholt, pp. 21-22)

Fisher, Frisch y Roos eran conscientes de que "en la práctica, la línea [entre economistas cuyo trabajo combinaba métodos abstractos y empíricos, y aquellos que usaban exclusivamente los últimos] sería difícil de dibujar" (en Bjerkholt, 2014b, p. 10). El punto de separación entre candidatos elegibles y no elegibles era borroso, lo cual es evidente en la lista de personas que recibieron la carta seminal. Aunque esta comprendía en su mayoría a académicos vinculados a los grandes nombres de la revolución marginal, cuyo trabajo ejemplificaba el uso de las matemáticas en la Economía, desde un punto de vista contemporáneo, la lista resulta significativamente heterogénea[24]. Esta heterogeneidad puede ser entendida, en primer lugar, como la expresión del ya mencionado continuum intelectual entre *la corriente dominante* y la Institucional durante el periodo de entreguerras.

Ciertamente el momento de proclamar el monopolio sobre la definición de *Ciencia Económica* no había llegado —los desarrollos intelectuales y organizacionales que dieron gran ímpetu a la *corriente dominante* y la consolidaron definitivamente en Estados Unidos, solo convergieron durante las postrimerías de la Segunda Guerra Mundial—. La organización de una pequeña red de académicos europeos y norteamericanos con intereses similares —y un serio conocimiento en matemáticas—, que unieron fuerzas para promover sus ideas sobre el futuro de la disciplina, no explica el ímpetu de la posguerra. Sin embargo, puede considerase como un punto de quiebre y como el momento de reflexión sobre la estructura disciplinar necesaria para sostener la transformación.

Así, en el periodo de entreguerras fue posible "mantener un número de creencias económicas distintas en muchas formas sin estar fuera de lugar o perder necesariamente el respeto por los pares" (Morgan & Rutherford, 1998, p. 4). De hecho, la vena científica de los economistas estadounidenses les permitió guardar algunos estándares comunes, argumentar sobre cuestiones de método, compartir las mismas plataformas e incluso contribuir a las mismas revistas. El análisis de los vínculos de W.C. Mitchell con la Sociedad Econométrica es particularmente revelador sobre este asunto.

[24] Vale la pena mencionar que el grupo europeo también era heterogéneo.

Durante los primeros años de 1930 Mitchell fue uno de los economistas más importantes (si no el más importante) de Estados Unidos. Aunque estuvo ausente en la lista de personas a las que fue enviada la carta seminal, fue invitado a la reunión inaugural de la Sociedad Econométrica el 29 de diciembre de 1930[25]. Mitchell, sin embargo, no asistió a la reunión, y su nombre tampoco apareció como parte del Consejo inicial de la Sociedad. Una vez la confusión que rodeaba la equivalencia entre los términos *cuantitativo* y *estadístico* fue resuelta durante la organización de la reunión, su nombre fue retirado de la lista de candidatos para integrar el Consejo (Bjerkholt, 2014a, pp. 27-28)[26]. El objetivo principal de la Sociedad era promover estudios que apuntaran a unificar una aproximación teorética-cuantitativa y empírica-cuantitativa de los problemas económicos. Como consecuencia, los métodos inductivo-empíricos de Mitchell, basados en datos estadísticos detallados, no tenían lugar dentro de este repertorio.

Ahora bien, la heterogeneidad del grupo que recibió la carta también puede ser entendida como un reflejo de la posición no-dominante en el campo de la economía desde la cual escribían Fisher, Frisch y Roos. La respuesta de François Divisia a la pregunta que hacía la carta por el nombre de la revista de la asociación, ilustra esta idea:

> *En cuanto al nombre de la revista, pienso que la fórmula Ciencia Económica27 es muy peligrosa. Parece indicar que queremos monopolizar la ciencia económica y que somos los únicos que representamos la verdadera ciencia económica. Esto puede estar, tal vez, en el fondo de nuestros pensamientos, pero pienso que no es el momento de proclamarlo. Añadiría, incluso, que parece un poco ridículo adoptar un nombre tan importante para una publicación periódica que en sus inicios sería más bien modesta. En este sentido, me parece que debemos presentaros como cultivadores de un cierto método de investigación económica (o grupo de métodos) porque pensamos que es bueno, y no porque tenemos la pretensión de decidir definitivamente la cuestión de si otros métodos también son interesantes. Sobre esto, veremos luego, a juzgar por los resultados.* (En Bjerkholt, 2014a, p. 19)

Aquí, una vez más, las respuestas de los economistas franceses que recibieron la primera carta son reveladoras. Por ejemplo, Colson, insistía en que

> *sobre todo debemos evitar herir a aquellos economistas interesados en facilitar el uso de métodos más precisos en nuestra ciencia, sin ser capaces de hacerlo por sí mismos. Sería desafortunado provocar una reacción contra nuestras ideas por parte de las personas que tienen la mayoría de las cátedras y los ejecutivos oficiales que tienen, en consecuencia, gran influencia en la juventud.* (En Bjerkholt 2014a, p. 16)

---

[25] Mitchell también estuvo en el primer consejo de asesoría que dirigió la Comisión Cowles sus primeros años y fue el primer presidente norteamericano de la Sociedad Econométrica, después de Fisher.

[26] Schumpeter es el responsable del discurso que esclareció la confusión. En él hizo énfasis en el alcance teorético de la sociedad como una combinación de métodos abstracto-racionales y concreto-empíricos.

[27] No tiene énfasis en el original.

El énfasis en la importancia de mantener un perfil bajo habla sobre la debilidad de su posición:

> *No pienso que debamos arriesgar bajo ninguna circunstancia ser tomados como una máquina para la guerra, y me parece que esta trampa es más bien fácil de evitar.* (En Bjerkholt 2014a, p. 20)

Teniendo esto en cuenta, la reorientación —entre la primera y la segunda carta— hacia una Sociedad con dos grupos, uno de miembros regulares y otro de *fellows* investidos de cierto poder, puede ser interpretada como la estrategia de un grupo en una posición no-dominante[28]. El escrutinio detallado de Bjerkholt (2014a, p.24) de los requerimientos de membresía muestra que los criterios establecidos en la carta seminal de junio eran idénticos a los requisitos para los *fellows* del borrador del documento de constitución y que fueron citados en la carta de invitación de noviembre. Esta reorientación de la política de elegibilidad, sugiere Bjerkholt, fue una "mejor propuesta". Por un lado, era útil para promover la econometría al ampliar el número potencial de miembros —a través de pocos requerimientos para unirse a la Sociedad—, y por otro, era parte de un esfuerzo para mantener la Sociedad en el *camino correcto*— a través de un criterio de elegibilidad más estricto para los *fellows*.

El alcance de las aspiraciones del proyecto de la Sociedad Econométrica y el estado embrionario de la disciplina para asegurarlo, es evidente en la necesidad de acuñar un término para catalogar su campo de acción. El término *econometría* no apareció en la carta seminal de junio para indicar el campo de acción, ni como parte del nombre de la asociación. El término *econometría* apareció allí de forma oblicua entre los nombres propuestos para la revista, y solo fue acuñado explícitamente en la carta de invitación de noviembre:

> *Si la sociedad se erige con el campo de acción que hemos sugerido, parece recomendable acuñar una palabra, ya que ninguna palabra individual actual connota exactamente la idea correcta. Hasta ahora hemos sido incapaces de encontrar una mejor palabra que "econometría". Somos conscientes del hecho de que al principio alguien pueda malinterpretar esta palabra como algo que hace referencia exclusivamente a la estadística económica, pero si en la publicación oficial y en los membretes siempre se da el subtítulo completo de la sociedad, y si los miembros y fellows de la sociedad persisten en usar "econométrico" y "econometría" en su debido sentido, pensamos que pronto estará claro para todos que la sociedad está interesada en la teoría económica tanto como en cualquier otra cosa.* (En Bjerkholt 2014a, p. 33)

En su carta seminal, Fisher, Frisch y Roos mencionan la creación de una revista para fomentar el proyecto. Provisionalmente llamada *Oekonommetrika*, la revista fue planeada como plataforma para publicar contribuciones que cerraran la brecha entre

[28] En la carta seminal el proyecto estaba diseñado como una *asociación* internacional. Solo es después de la segunda carta que el proyecto se denota como *sociedad*.

trabajos abstracto-racionales y aquellos basados en una orientación empírico-inductiva. El grupo presentó, además, tres de sus funciones:

> *Además de la publicación de artículos originales, existirían, en nuestra opinión, tres funciones principales para la revista: (1) revisar y resumir los trabajos matemáticos económicos más importantes, tanto aquellos publicados actualmente en otras revistas económicas, estadísticas y matemáticas, como trabajos sobresalientes del pasado; (2) suministrar notas biográficas respecto a economistas matemáticos; y (3) preparar una bibliografía comentada, completa y sistematizada de literatura relacionada con economía matemática. Esto requeriría la cooperación de corresponsales en muchos países.* (En Bjerkholt 2014a, p. 11)

Fisher, Frisch y Roos consideraron otras tareas para la sociedad académica, las cuales fueron anunciadas como epílogo de la primera carta:

> *Además de la creación y publicación de una revista, pueden existir otras numerosas tareas posibles para la asociación, como promover el establecimiento de cátedras de teoría económica que incluyan economía matemática en las universidades, ayudar a la estandarización de la notación y la terminología de la teoría económica, publicar un diccionario léxico de términos técnicos de teoría económica, servir como bureau de referencia para empresas comerciales que tengan problemas relacionados con dificultades teoréticas y estadísticas, y demás* (Bjerkholt 2014a, pp. 11-12).

Ambas funciones, aquellas contempladas para la revista y las tareas concretas a través de las cuales la Sociedad adelantaría su proyecto, son elementos constitutivos de la estructura disciplinar que aseguró la hegemonía ortodoxa en la segunda mitad del siglo XX. Esta estructura se consolidó a lo largo de las décadas que siguieron la fundación de la Sociedad. En este proceso el apoyo financiero de Alfred Cowles fue decisivo.

4. EL PROYECTO DE LA SOCIEDAD ECONOMÉTRICA Y LA COMISIÓN COWLES

Casi inmediatamente después de la constitución de la Sociedad Econométrica, un banquero adinerado de Colorado llamado Alfred Cowles III apoyó el enfoque del proyecto por medio de contribuciones financieras. De forma significativa, A. Cowles amparó la publicación de *Econometrica* y la creación del centro de investigaciones, la Comisión Cowles, donde la recién nacida sociedad internacional de economistas académicos implementó su proyecto de econometría. Bajo el auspicio de Cowles, la Sociedad Econométrica creció rápidamente, pasando de 16 miembros en el momento de su fundación en 1930 a 163 miembros en 1933 y 671 en 1939 (Fourcade, 2009, p. 86). Aunque la influencia de la Sociedad Econométrica decreció progresivamente después de la llegada de la Comisión a la Universidad de Chicago en 1939, el proyecto econométrico continuó influenciando las investigaciones llevadas a cabo en

Cowles. Solo hasta finales de la década de 1940, el proyecto econométrico, tal como había sido concebido por la Sociedad Econométrica, fue gradualmente abandonado.

A principios de la década de 1940, los fundamentos institucionales-disciplinares impulsados por la Sociedad Econométrica estaban todavía en construcción. Aunque el proceso tomaría más de tres décadas, en esta coyuntura específica los cimientos ya se habían pensado exhaustivamente: las fronteras entre la *ortodoxia* y el institucionalismo se estaban volviendo cada vez más claras. La evaluación de Oscar Lange en 1942 de los candidatos potenciales para la dirección de la Comisión es reveladora:

> *No lo clasificaría [a Burns] como un estadista matemático (de la clase de Hotelling, Bartky, o incluso Marschak), y tampoco pienso que tiene mucho de teórico económico. Con todo, tiene una mente excelente (probablemente mejor que la de Haberler), pero le falta entrenamiento en análisis de teoría económica debido, en parte, al desprecio institucionalista de este tipo de análisis que le impartió W.C. Mitchell. Acabo de leer uno de sus manuscritos con Mitchell sobre los ciclos económicos, y es bastante decepcionante: una colección de miles de datos que están promediados mecánicamente, etc., sin siquiera un intento por distinguir entre hechos básicos y secundarios; todo esto hecho deliberadamente en el nombre del "empirismo sin prejuicios". (61) Parece, sin embargo, que la responsabilidad por esta característica de su investigación es de Mitchell más que de sí mismo. Estoy seguro de que bajo su dirección la Comisión Cowles haría, también, un buen trabajo. Pero la naturaleza del trabajo se alejaría, una vez más, de aquello para lo que la Comisión fue diseñada originalmente. No sería análisis econométrico, sino investigación pura en busca de hechos, algo como una versión reducida del National Bureau. En caso de tener que escoger entre Haberler y Burns, preferiría a Haberler, quien, aunque tiene mucho menos de estadista que Burns, tiene mayor madurez analítica como economista. (Lange to Leland, October 1[?], 1942.)* (En Bjerkholt, 2014c, p. 26)

Finalmente, en 1943 Jacob Marschak fue elegido como director de investigación. Bajo su orientación, el proyecto de conectar métodos abstractos e inductivos tomó la forma específica de proveer contenido empírico al sistema walrasiano. Fue precisamente este proyecto el que Tjalling Koopmans defendió vehementemente en la controversia "Medición sin teoría", epítome de la demarcación llevada a cabo por economistas institucionalistas y *ortodoxos* para diferenciar sus aproximaciones. Aunque la contienda continuó en las décadas de 1930 y 1940, el artículo de Koopman de 1947 en la *American Economic Review* fue su máxima manifestación pública.

A finales de los cuarenta, después del fin de la controversia, el camino para más abstracciones quedó abierto. Es importante insistir en que este no fue un camino fácil, progresivo o acumulativo —una ruptura crítica ocurrió en el contexto de la Comisión Cowles entre 1948 y 1952: de aquí en adelante, los estándares y prácticas de la economía *ortodoxa* cambiaron (Mirowski, 2002, p. 166)—. El sistema de Walras se reanimó bajo el paradigma de Von Neumann de la teoría de juegos, poniendo la *corriente dominante à la Cowles* en línea con los desarrollos de la ciencia del siglo XX. El abandono del proyecto de mejora de las estimaciones empíricas del sistema de ecuaciones de Walras por medio de nuevas técnicas estadísticas, efectivamente logró la inversión de jerarquías entre las aproximaciones inductiva y deductiva en la Economía.

Durante los periodos de entreguerras y posguerra, los proyectos sucesivos de la Comisión Cowles fueron concebidos dentro de la estructura del sistema de Walras. Del brazo abstracto del proyecto, cuyo objetivo era conectar la investigación deductiva e inductiva, este sistema pasó a ser un aparato deductivo abstracto-matemático. Esta reorientación, sin embargo, no puede ser entendida sin tener en cuenta la intervención de inversiones intensivas del gobierno en la defensa nacional.

5. CONCLUSIÓN

La delimitación realizada inicialmente durante la constitución de la Sociedad Econométrica, y luego en la Comisión Cowles, no ocurrió de manera aislada. Por el contrario, "se llevó a cabo dentro de estructuras que involucraron patrones y jerarquías operantes en el contexto de una sociedad política y económica que apoyaba los llamados a la intervención económica en el periodo de entreguerras y el libre mercado en el periodo de posguerras" (Morgan & Rutherford, 1998, p. 24). Este artículo se enfocó en cómo el grupo de economistas que se reunió alrededor de la Sociedad Econométrica y la Comisión Cowles, en los periodos de entreguerras y posguerra, articuló y capitalizó estos cambios en dos formas decisivas: 1) monopolizando el repertorio de una Economía auténticamente científica y diferenciando su aproximación de concepciones rivales; y 2) fundando la estructura disciplinar-institucional para el desarrollo de su proyecto.

A principios de 1960 la *corriente dominante à la Cowles* fue exitosa en ambos sentidos: las aproximaciones institucionalistas de la Economía fueron desplazadas y *Econometrica* se convirtió en una de las revistas líderes de la disciplina. El giro cuantitativo de la economía persistió bajo nuevas formas y continuó dependiendo de la profunda reverencia americana a los *números* como única forma de alcanzar relevancia y legitimidad científica.

Más que seguir la aproximación genealógica de Arrow anunciada en el título de su presentación, este artículo se basó en la premisa de que el establecimiento de la *corriente dominante* como aproximación hegemónica en la Economía involucró un reagrupamiento estratégico de ideas y redes relativamente diferentes sobre categorías académicas. Este proceso se llevó a cabo a lo largo de los años que cubre el artículo. Durante el periodo de entreguerras y la posguerra, las diferentes corrientes de la economía ortodoxa dibujaron y reforzaron límites específicos, hasta resultar mezcladas inextricablemente durante la segunda mitad del siglo XX. Estudiar estos años cruciales nos permite enriquecer nuestro conocimiento, tanto de las especificidades de cada corriente como del éxito del proyecto en general. Este artículo analizó la corriente iniciada por la Sociedad Econométrica y desarrollada por la Comisión Cowles. Debido a la trascendencia del sistema de Walras en este contexto, este artículo nutre nuestro conocimiento sobre su viaje de Europa a Estados Unidos.

BIBLIOGRAFÍA

ARROW, K. J. (1983). "Cowles in the History of Economic Thought". In A. K. KLEVORICK (ed.), *The Cowles Foundation Anniversary Volume.* (pp. 1-17). New Heaven: The Cowles Foundation.

BACKHOUSE, R. E. y MEDEMA, S. G. (2009a). "Defining Economics: The Long Road to Acceptance of the Robbins Definition". *Economica, 76,* 805-820.

BACKHOUSE, R. E., y MEDEMA, S. G. (2009b). "Robbins's Essay and the Axiomatization of Economics". *Journal of the History of Economic Thought*, 31(04), 485.

BJERKHOLT, O. (2014a). *Econometric Society 1930: how it got founded*, 1-38.

BJERKHOLT, O. (2014b). Trygve Haavelmo at the Cowles Commission. *Econometric Theory*, 31(01), 1-84.

BURNS, A. F., y MITCHELL, W. C. (1946). *Measuring Business Cycles*. New York: National Bureau of Economic Research.

CHRIST, C. F. (1952). *The History of the Cowles 1932-1952*. Chicago: Cowles Commission.

COWLES COMMISSION (1952). *Economic Theory and Measurement. A Twenty Year Research Report 1932-1952*. Baltimore.

DEBREU, G. (1984). "Economic Theory in the Mathematical Mode". *The American Economic Review*, 7(3), 267-278.

DÜPPE, T. (2012). "Arrow and Debreu de-homogenized". *Journal of the History of Economic Thought*, 34(4), 491-514.

DÜPPE, T. y WEINTRAUB, E. R. (2014a). *Finding Equilibrium: Arrow, Debreu, McKenzie and the Problem of Scientific Credit*. New Jersey: Princeton University Press.

DÜPPE, T. y WEINTRAUB, E. R. (2014b). Sitting the New Economic Science: The Cowles Commission's Activity Analysis Conference of June 1949. *Science in Context,* 27(03), 453-483.

EMMETT, R. B. (2010). *The Elgar Companion to the Chicago School of Economics*. Northampton: Edward Elgar Publishing.

FOURCADE, M. (2009). *Economists and Societies: Discipline and Profession in the United States, Britain, and France, 1890s to 1990s*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

GIERYN, T. F. (1983). "Boundary-Work and the Demarcation of Science from Non-Science: Strains and Interests in Professional Ideologies of Scientists". *Review, American Sociological*, 48(6), 781-795.

GIERYN, T. F. (1995). "Boundaries of Science". In S. JASANOFF, G. E. MARKLE, J. C. PETERSEN, y T. PICH (eds.), *Handbook of Science and Technologies Studies* (pp. 393-443). Thousand Oaks: Sage Publications.

GIERYN, T. F. (1999). *Cultural Boundaries of Science: Credibility on the Line*. Chicago: Chicago University Press.

HEILBRON, J. (2004). "A Regime of Disciplines: Toward a Historical Sociology of Disciplinary Knowledge". In CHARTES CAMIC y HANS JOAS (eds.), *The Dialogical Turn: New Roles for Sociology in the Postdisciplinary* (pp. 23-42). L Anham: Rowman y Littlefield.

HILDRETH, C. (1986). *The Cowles Commission in Chicago: 1939-1955*. Berlin: Springer.

LOUÇÃ, F. (2010). *The years of high econometrics. A short history of the generation that reinvented economics*. *Journal of Evolutionary Economics* (Vol. 20). London: Routledge. doi:10.1007/s00191-009-0166-4.

MATA, T. (2009). "Migrations and Boundary Work: Harvard, Radical Economists, and the Committee on Political Discrimination". *Science in Context,* 22(01), 115-143. doi:10.1017/S0269889708002093.

MIROWSKI, P. (1999). “Cyborg Agonistes: Economics Meets Operational Research in Mid-Century”. *Social*, 29(5), 685-718.

MIROWSKI, P. (2002a). “Cowles Changes Allegiance: from empiricism to cognition as intuitive statistics”. *Journal of the History of Economic Thought*, 24(2), 165-193.

MIROWSKI, P. (2002b). *Machine Dreams: Economics Becomes a Cyborg Science*. London: Cambridge University Press.

MIROWSKI, P. y HANDS, D. (1998). “A paradox of budgets: the postwar stabilization of American neoclassical demand theory”. *History of Political Economy*, 30(Supplement), 260-92.

MIROWSKI, P. y HANDS, D. W. (2006). “Introduction to Agreement on Demand: Consumer Theory in the Twentieth Century”. *History of Political Economy*, 38(Suppl 1), 1-6.

MORGAN, M. S. (1992). *The History of Econometric Ideas*. Cambridge: Cambridge University Press.

MORGAN, M. S., y RUTHERFORD, M. (1998a). “American economics: The character of the transformation”. *History of Political Economy*, 30(Supplement), 1-26.

MORGAN, M. S. y RUTHERFORD, M. (eds.). (1998b). *From Interwar Pluralism to Postwar Neoclassicism. Annual Supplement to Volume 30 History of Political Economy*. Durham: Duke University Press Books.

PORTER, T. M. (1997). *Trust in Numbers: The Pursuit of Objectivity in Science and Public Life. (eBook and Paperback)*. Princeton: Princeton University Press.

ROSS, D. (1979). *The Origins of American Social Science. Context and Ideas*. Cambridge: Cambridge University Press.

RUTHERFORD, M. (1997). “American Institutionalism and the History of Economics”. *Journal of the History of Economic Thought*, 19(2), 178-195.

SOLOW, R. M. (1983). “Cowles and the Tradition of Macroeconomics”. In A. K. KLEVORICK (ed.), *The Cowles Fundation Anniversary Volume* (pp. 1-20). New Heaven: The Cowles Fundation.

STAPLEFORD, T. A. (2011). “Milton Friedman, Institutionalism, and the science of history”. In R. VAN HORN, P. MIROWSKI, y T. A. STAPLEFORD (eds.), *Building Chicago Economics* (pp. 3-35). Cambridge: Cambridge University Press.

VAN HORN, R., MIROWSKI, P., y STAPLEFORD, T. (eds.). (2011). *Building Chicago Economics. New Perspectives History Americas Most Powerful Economics Program: History of economic thought and methodology*. Cambridge: Cambridge University Press.

WEINTRAUB, E. R. (2002). *How Economics Became a Mathematical Science*. Durham: Duke University Press Books.

WEINTRAUB, E. R. (ed.). (2014). *MIT and the Transformation of American Economics*. Durham: Duke University Press.

WEINTRAUB, R. (2007). “Economic Science Wars”. *Journal of the History of Economic Thought*, 29(3), 267-282.

CAPÍTULO 19

EL ÍNDICE DE CONCENTRACIÓN Y SU DESCOMPOSICIÓN EN GRUPOS

JESÚS BASULTO SANTOS
JOSÉ ANTONIO CAMÚÑEZ DÍAZ
FRANCISCO JAVIER ORTEGA IRIZO
Universidad de Sevilla

1. INTRODUCCIÓN

En el impuesto de la renta de las personas físicas (IRPF), cuando se ordenan de menor a mayor los valores de la renta antes del impuesto, el correspondiente gravamen, que se aplica a cada una de estas rentas, es usual ordenarlo según la renta antes del impuesto, lo que produce una reordenación del gravamen que no coincide con su ordenación de menor a mayor. Así, podemos observar que dos rentas antes del impuesto de 56.797 y 56.856 euros anuales generen unos gravámenes de 15.186 y 14.276 euros, respetivamente, al estar estos gravámenes ordenados por la renta antes del impuesto.

Si ahora queremos medir la desigualdad del gravamen, debemos acumular proporcionalmente las declaraciones, con gravámenes ordenados de menor a mayor, que relacionamos con las acumulaciones de los valores del gravamen, divididos por el total, que genera una curva de Lorenz, siendo el doble del área entre el segmento de igualdad y la curva de Lorenz, el llamado índice de Gini, que representamos por G.

Ahora bien, si queremos relacionar el gravamen con la renta antes del impuesto, debemos ordenar los gravámenes según el orden de las rentas antes del impuesto, lo que introduce un reordenamiento del gravamen distinto del orden de menor a mayor. Ahora las acumulaciones de declaraciones y de gravamen se hacen según el desorden del gravamen, lo que genera la curva de concentración. El doble del área entre el área por debajo del segmento de igualdad y el área por debajo de la curva de concentración, es el llamado índice de concentración, que representamos por *C*.

A medida que el desorden del gravamen es mayor, la curva de concentración se aleja, por encima, de la curva de Lorenz del gravamen, llegando a cruzar el segmento de igualdad, en contra de la curva de Lorenz que no puede estar por encima del segmento de igualdad. El desorden mayor ocurre cuando el gravamen está ordenado de mayor a menor, siendo entonces $C = -G$.

El desorden en el gravamen produce que dos rentas después del impuesto aumenten su distancia y, en algunas ocasiones, estén invertidas. Para las dos rentas citadas, 56.797 y 56.856, con diferencia absoluta de 59 euros, las rentas después del impuesto son 41.611 y 42.580, siendo ahora la diferencia absoluta igual a 969 euros, y comparado con 59 euros, resulta que la diferencia se ha multiplicado casi por 16,5. Un ejemplo de inversión del orden es: las rentas antes del impuesto 698.767 y 711.445 euros, con rentas después del impuesto 574.597 y 402.819 euros, respectivamente.

En el presente trabajo no recogeremos el caso continuo de la curva de concentración que puede verse en el capítulo 8 del libro de Kakwani (1980).

La estructura del trabajo es la siguiente: si el índice de Gini es una medida de dispersión relativa que hace uso de la Diferencia Media de Gini, veremos que el índice de concentración es la diferencia de dos medidas de dispersión relativas. Veremos algunas de las propiedades de los índices de concentración y su relación con el índice de Gini. También veremos que una medida de reordenación, R, caso del gravamen o la renta después del impuesto, es una media de dispersión relativa. Al igual que el índice de Gini admite una descomposición en grupos debido a Mehran (1975) y Dagum (1997), veremos que un índice de concentración admite una descomposición en grupos semejante al del índice de Gini.

2. ÍNDICE DE GINI E ÍNDICES DE CONCENTRACIÓN

El índice de Gini para datos desagregados a nivel individual se define

$$G = \frac{2\sum_{k=1}^{n}\left(2k - 1 - n\right)x_k}{2\bar{x}\,n^2}, \tag{1}$$

donde los valores x_k son no negativos y están ordenados de menor a mayor, es decir $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$. El peso variable asociado al valor x_k es $w_k = 2k - 1 - n$. El recorrido de este índice es el intervalo $\left[0,1\right)$.

Cuando los valores $x_k = \bar{x}$, entonces $G = 0$, y cuando $x_k = 0$ para k = 1, 2,…, n–1; siendo $x_n > 0$, resulta un valor de $G = \frac{n-1}{n}$.

Los pesos dependen del orden o rango de los valores $x_1 \le x_2 \le ... \le x_n$, de ahí que (1) se puede escribir también como

$$G = \frac{2\sum_{k=1}^{n}\left(2\times \text{rango}\left(x_k\right)-1-n\right)x_k}{2\bar{x}\,n^2},$$

siendo el $\text{rango}\left(x_k\right) = k$.

Cuando los valores x_k, $k = 1,2,...,n$, no están ordenados de menor a mayor, los representamos como $\tilde{x}_k$, $k = 1,2,...,n$, siendo el total de los posibles desordenes o permutaciones el factorial de n para datos distintos, un número que puede ser muy grande. Ahora el llamado índice de concentración para los datos $\tilde{x}_k$, $k = 1,2,...,n$, se define como

$$C = \frac{2\sum_{k=1}^{n}\left(2\times \text{rango}\left(x_k\right)-1-n\right)\tilde{x}_k}{2\bar{x}\,n^2} = \frac{2\sum_{k=1}^{n}\left(2k-1-n\right)\tilde{x}_k}{2\bar{x}\,n^2}, \qquad (2)$$

donde señalamos que los pesos dependen del rango u orden de los valores x_k, $k = 1,2,...,n$.

El permutar o desordenar los valores ordenados x_k, $k = 1,2,...,n$, de menor a mayor, que dan lugar a los valores $\tilde{x}_k$, $k = 1,2,...,n$, surge de forma natural en el Impuesto de la Renta de las Personas Físicas (IRPF).

Cuando los valores de la renta antes del impuesto se ordenan de menor a mayor, el gravamen que recae sobre cada una de estas rentas se ordena según la renta, y la diferencia entre la renta y el gravamen da lugar a la renta después del impuesto, cuyos valores siguen ordenados según la renta antes del impuesto. Cuando las rentas después del impuesto son ordenadas de menor a mayor, como los valores x_k, $k = 1,2,...,n$, es muy frecuente que las rentas después del impuesto, ordenadas según la renta antes del impuesto, sea una reordenación con valores $\tilde{x}_k$, $k = 1,2,...,n$, de los valores x_k, $k = 1,2,...,n$.

Por ejemplo, podemos encontrarnos con dos individuos A y B con rentas anuales antes del impuesto del tipo: A = 75.878 euros y B = 76.017 euros, con una diferencia de 139 euros, y después del impuesto con rentas: A = 56.034 euros y B = 54.553 euros, con una diferencia de 1.481 euros. Si estas rentas después del impuesto las ordenamos de menor a mayor resulta 54.553 < 56.034, y si los ordenamos según la renta antes del impuesto tenemos $56.034 \prec 54.553$. Vemos pues que ambos órdenes son incompatibles.

Contribuyentes con la misma edad, que presentan declaraciones conjuntas, con rendimientos sólo del trabajo y tienen la misma renta antes del impuesto, pueden acabar teniendo rentas después del impuesto distintas. Una explicación es que uno de los declarantes tenga más hijos que el otro (con edades que permitan aplicar las deducciones), que tenga una cierta minusvalía y que ingrese una mayor cantidad en planes de pensiones (lo que añade nuevas deducciones) frente al otro que no tiene minusvalía y que ingresa menos dinero en planes de pensiones).

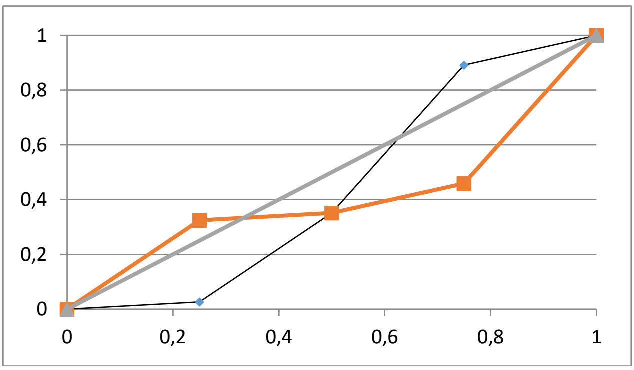
Probaremos más adelante que los valores de estos índices de concentración están en el intervalo $\left[-G, G\right]$, observando que ahora el índice de concentración puede ser negativo. El valor máximo de C ocurre cuando los valores $\tilde{x}_k$, $k=1,2,...,n$, están ordenados de menor a mayor, y el valor mínimo de C ocurre cuando los valores $\tilde{x}_k$, $k=1,2,...,n$, están ordenados de mayor a menor.

Si el índice de Gini está asociado con la curva de Lorenz, siendo el doble del llamado área de Lorenz-Gini, el área entre el segmento de igualdad y la curva de Lorenz, los índices de concentración están asociados a las curvas de concentración, siendo estos índices igual al doble del área definida como la diferencia entre el área por debajo del segmento de igualdad y el área por debajo de la curva de concentración.

Si ya hemos dicho que el índice de concentración puede ser negativo, las curvas de concentración también pueden estar por encima del segmento de igualdad, situación que no ocurre con las curvas de Lorenz.

Otra propiedad de las curvas de concentración en comparación con las curvas de Lorenz es que si estás son funciones convexas, en el caso de las curvas de concentración pueden ser también cóncavas.

Las curvas de concentración generadas a partir de los datos ordenados $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n$, se cortan como mostramos en el siguiente ejemplo con datos 5, 20, 60 y 100.

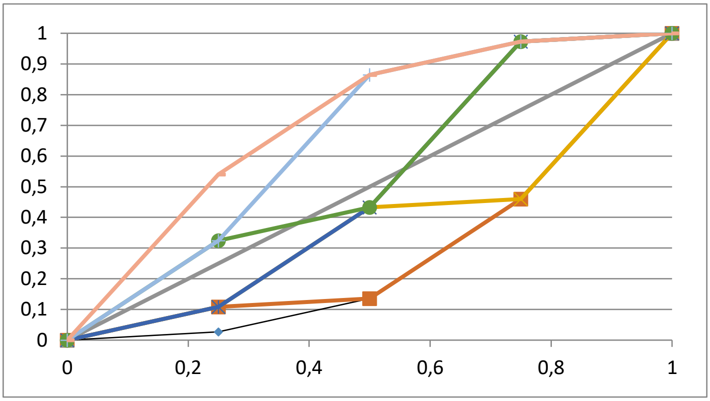


La curva de concentración de color roja corresponde a los datos desordenados 60, 50, 20, 100; los de la curva de concentración de color negra son 5, 60, 100, 20. El segmento de igualdad es de color verde.

Podemos pasar de los datos ordenados de menor a mayor a los datos desordenados de mayor a menor sin que las curvas se corten (pueden coincidir en algún tramo). Veamos los datos.

5	20	20	20	60	60	100
20	5	60	60	20	100	60
60	60	5	100	100	20	20
100	100	100	5	5	5	5

y las curvas de concentración de estos datos son:



Recordemos que hay 120 ordenaciones.

3. COMPARACIONES ENTRE EL ÍNDICE DE GINI Y LOS ÍNDICES DE CONCENTRACIÓN

Las fórmulas (1) y (2) tienen en común los llamados pesos $w_k = 2k - 1 - n$ que facilitan la comparación entre dichos índices. Veamos un ejemplo.

k	x_k	$2k$–1–5	$\tilde{x}_k$	$x_k(2k-6)$	$\tilde{x}_k(2k-6)$
1	2	–4	2	–8	–8
2	6	–2	10	–20	–12
3	10	0	6	0	0
4	15	2	20	40	30
5	20	4	15	60	80

En este ejemplo se permutan los valores 6 y 10, por una parte, y 15 y 20 por otra, dando el desorden de la columna cuarta de la tabla. El valor del índice de Gini es 0,3396226, y el valor del índice de concentración es 0,2716981.

Y la relación entre C y G es:

$$\begin{gathered}G-C=(6-10)(2\times 2-6)+(10-6)(2\times 3-6)+(15-20)(2\times 4-6)+\\+(20-15)(2\times 5-6)=2\left[(10-6)(3-2)+(20-15)(5-4)\right]\end{gathered},$$

Luego

$$C=G-\left(\frac{2}{\bar{x}25}\right)\left[(10-6)(3-2)+(20-15)(5-4)\right].$$

Siendo C = 0,3396226 – 0,0679245 = 0,2716981, que coinciden con el cálculo directo de C. Vemos pues que $C < G$.

Cuando la ordenación $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ se permuta de la forma $\tilde{x}_k = x_{n-k+1}$, es decir que el orden sea ahora de mayor a menor, entonces el valor de $C + G = 0$, luego $C = -G$, ya que la suma

$$C+G=\frac{1}{\bar{x}25}\sum_{k=1}^{5}\left(x_k+\tilde{x}_k\right)(2k-6)=0,$$

y que

$$(2+20)(-4)+(6+15)(-2)+(10+10)(0)+(15+6)(2)+(20+2)(4)=0.$$

Vemos pues que los valores del índice de concentración C están en el intervalo $[-G,G]$.

4. LA DIFERENCIA MEDIA DE GINI

Sabemos que el índice de Gini proviene de la llamada Diferencia Media de Gini, una medida de dispersión absoluta definida como

$$DMG=\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|x_i-x_j\right|}{n^2}. \tag{3}$$

que surge del siguiente ejemplo:

	2	6	10	15	20
2	0	4	8	13	18
6	4	0	4	9	14
10	8	4	0	5	10
15	13	9	5	0	5
20	18	14	10	5	0

4	9
	5

4	8	13	18
			14
			10
			5

total	18
72	4
	72

total	9
18	2
	18

4			
8			
13			
18	14	10	5

4	
9	5

Vemos que el primer total, 72, que proviene de sumar 4 + 8 + 13 + 18 + 14 + 10 + 5, es el producto de 18 por 4, donde 18 es la diferencia entre el valor mayor, 20, y el menor, 2. Además 4 es igual a (5 + 1 – 2 × 1). Luego 72 es igual a (5 + 1 – 2 × 1) × (20 – 2). El siguiente total es 18, que proviene de sumar 4 + 9 + 5, y es el producto de 9 por 2, donde 9 es la diferencia entre 15 y 6, donde 6 es el segundo en orden y 15 es el penúltimo. Como 2 es igual a (5 + 1 – 2 × 2), 9 es igual a (5 + 1 – 2 × 2) × (15 – 6). Siguiendo estos cálculos, sumamos todas las celdillas, y resulta:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|x_i - x_j\right| = \sum_{k=1}^{n}(n+1-2k)\left[x_{n+1-k} - x_k\right]$$

que descomponemos en

$$\sum_{k=1}^{n}(n+1-2k)x_{n+1-k} - \sum_{k=1}^{n}(n+1-2k)x_k$$

Viendo que la primera componente ordena los datos de mayor a menor, $x_n \geq x_{n-1} \geq .... \geq x_2 \geq x_1$, y la segunda componente los ordena de menor a mayor: $x_1 \leq x_2 \leq ... x_{n-1} \leq x_n$.

Además, el término mayor de la primera componente $(n-1)x_n$ es igual al término mayor de la segunda componente, cambiado de signo, $(1-n)x_n$, y por el signo negativo de la segunda componente resulta el mismo valor. Este resultado ocurre con todos los datos. En consecuencia, cambiando del signo la segunda componente resulta igual a la primera. Así, el valor de todas las celdillas es:

$$2\sum_{k=1}^{n}\left(2k-1-n\right)x_k$$

La fórmula de la Diferencia media de Gini es ahora:

$$DMG=\frac{2\sum_{k=1}^{n}\left(2k-1-n\right)x_k}{n^2}. \quad (4)$$

Como esta medida de dispersión debe de ser no negativa, nos preguntamos si los índices de concentración pueden ser construidos a partir de dos medidas de dispersión absolutas.

Para el ejemplo de datos ordenados $2<6<10<15<20$, obtenemos que la suma $\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}\left|x_i-x_j\right|=180$. Cuando reordenamos estos datos como 2, 10, 6, 20, 15, según el orden $2\prec 10\prec 6\prec 20\prec 15$, veamos cómo comparamos los pares de estos valores según los dos tipos de órdenes:

	2	10	6	20	15
2	0	8	4	18	13
10	8	0	–4	10	5
6	4	–4	0	14	9
20	18	10	14	0	–5
15	13	5	9	–5	0

Así, para el par (2,10), vemos que $2\prec 10$ y 2<10, luego ambos órdenes son compatibles, y calculamos dicha celda como $\left|2-10\right|=8$. Para la celda (10,6), vemos que, $10\prec 6$ pero 6 < 10, luego ambos órdenes no son compatibles, y calculamos dicha celda como $-\left|10-6\right|=-4$. Vemos pues que cuando los dos órdenes son compatibles asignamos un valor positivo al módulo de la diferencia entre los dos números que se comparan, pero cuando los dos órdenes no son compatibles, entonces asignamos un valor negativo al módulo de la diferencia entre los dos números que se comparan.

De los rectángulos amarillos tenemos las diferencias: 10 – 2, 6 – 2, 20 – 2, 15 – 2; 6 – 10, 20 – 10, 15 – 10; 20 – 6, 15 – 6; 15 – 20. Ahora vemos que el valor más pequeño 2 suma –8 en estas diferencias, tomando como pesos igual a (2 × 1 – 1 – 5) = –4, siendo 2 × (–4) = –8; el valor 10 suma –20, en estas diferencias, siendo el peso (2 × 2 – 1 – 5) = –2, luego 10 × (–2) = –20; el valor 6 suma cero, tomando como pesos (2 × 3 – 6) = 0, luego 6 × (0) = 0; el valor 20 suma 60 en estas diferencias, tomando como pesos (2 × 4 – 1 – 5) = 2, luego 20 × (2) = 40; finalmente el valor de 15 es 60 en estas diferencias, el peso es (2 × 5 – 1 – 5) = 4, luego 15 × (4) = 60. Estos cálculos corresponden a la fórmula (2).

El valor de todas las celdas es 144, es decir

$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5} c(i,j)\left|\tilde{x}_i - \tilde{x}_j\right| = 144,$$

donde $c(i,j)=1$ cuando son compatibles los dos órdenes, y $c(i,j)=-1$ cuando no son compatibles.

Cuando los datos están ordenados de menor a mayor, $c(i,j)=1$ para todos los pares (i, j).

Para el ejemplo $2 \prec 10 \prec 6 \prec 20 \prec 15$, $SDMG \times n^2$ puede expresarse como

$$2\left[|2-10|+|2-6|+|2-20|+|2-15|+|10-20|+|10-15|+|6-20|+|6-15|\right]-$$
$$-2\left[|10-6|+|20-15|\right]$$

siendo SDMG una media ponderada de la forma

$$\left(\frac{21}{25}\right)\frac{2\left[|2-10|+|2-6|+|2-20|+|2-15|+|10-20|+|10-15|+|6-20|+|6-15|\right]}{16+5}-$$
$$-\left(\frac{4}{25}\right)\frac{2\left[|10-6|+|20-15|\right]}{4},$$

donde incluimos 5 celdas nula en la parte primera. Vemos que es la diferencia de dos medidas de dispersión.

La cantidad asociado a los pares de datos que son compatibles con los dos órdenes es igual a 162, mientras que cuando no son compatibles la cantidad resulta –18, siendo el total igual a 144.

Ahora, podemos definir la seudodiferencia media de Gini siguiente:

$$SDMG = \Delta' = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c(i,j)\left|\tilde{x}_i - \tilde{x}_j\right|}{n^2}, \tag{5}$$

que, siguiendo los mismos pasos que hemos utilizados para obtener la diferencia media de Gini, se obtiene el resultado

$$\Delta' = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c(i,j)\left|\tilde{x}_i - \tilde{x}_j\right|}{n^2} = \frac{2\sum_{k=1}^{n}(2k-1-5)\tilde{x}_k}{n^2}. \tag{6}$$

Luego la medida de concentración C es igual a

$$C = \frac{SDMG}{2\tilde{\bar{x}}}, \tag{7}$$

y que para datos ordenados de menor a mayor resulta el índice de Gini. Vemos pues que el índice de concentración es la diferencia de dos medidas de dispersión relativas, siendo cada una de estas medidas de dispersión igual a la Diferencia absoluta de ciertos pares de valores. Así, el índice de concentración es una media ponderada de dos medidas de dispersión absolutas.

Otra fórmula de un índice de concentración es calcular el doble del área definida como la diferencia entre el área por debajo del segmento de igualdad y el área por debajo de la curva de concentración. Vernizzi (2009) obtiene la fórmula siguiente

$$C = \frac{1}{\bar{x}n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}\left(\tilde{x}_k - \tilde{x}_i\right),$$

que nosotros hemos ajustado para datos desagregados con frecuencias unitarias. Veamos que la fórmula (2) implica la expresión de Vernizzi.

En efecto:

$$C = \frac{\sum_{k=1}^{n}(2k-1-n)\tilde{x}_k}{\bar{x}\,n^2} = \frac{1}{\bar{x}\,n^2}\left[\sum_{k=1}^{n}k\tilde{x}_k - \sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\,\tilde{x}_k\right] = \frac{1}{\bar{x}\,n^2}\left[\sum_{k=1}^{n}k\tilde{x}_k - \sum_{k=1}^{n}S_k\right],$$

donde $S_k = \sum_{i=1}^{k}\tilde{x}_i$.

Luego

$$C = \frac{1}{\bar{x}\,n^2}\sum_{k=1}^{n}\left(k\tilde{x}_k - \sum_{i=1}^{k}\tilde{x}_i\right) = \frac{1}{\bar{x}\,n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}\left(\tilde{x}_k - \tilde{x}_i\right).$$

Veamos el significado de los elementos del doble sumatorio por medio del siguiente ejemplo de datos desordenados $20 \prec 30 \prec 14 \prec 25$.

	20	30	14	25
20	0			
30	10	0		
14	–6	–16	0	
25	5	–5	11	0

Los valores que están por debajo de la diagonal formada por ceros corresponden a (30 – 20), (14 – 20), (14 – 30), (25 – 20), (25 – 30) y (25 – 14).

Si ahora queremos rellenar las celdas por encima de la diagonal vamos a considerar el doble sumatorio $-\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k+1}^{n}\left(\tilde{x}_k-\tilde{x}_i\right)$, siendo sus valores –(20 – 30), –(20 – 14), –(20 – 25), –(30 – 14), –(30 – 25) y –(14 – 25). Ahora tenemos todas las celdillas.

	20	30	14	25
20	0	10	–6	5
30	10	0	–16	–5
14	–6	–16	0	11
25	5	–5	11	0

La suma de todas estas celdillas es $\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}\left(\tilde{x}_k-\tilde{x}_i\right)-\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k+1}^{n}\left(\tilde{x}_k-\tilde{x}_i\right)$, que por construcción es igual a $2\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}\left(\tilde{x}_k-\tilde{x}_i\right)$. Luego la fórmula (5) es igual a

$$\Delta^{'}=\frac{2\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}\left(\tilde{x}_k-\tilde{x}_i\right)}{n^2}, \qquad (5')$$

que nos permite expresa el índice de concentración (7) como

$$C=\frac{\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}\left(\tilde{x}_k-\tilde{x}_i\right)}{n^2\tilde{\bar{x}}}. \qquad (7')$$

Otra forma de llegar al índice de concentración es definir

$$I_{k-i}=\begin{cases}1: k>i\\ 0: k=i\\ -1: k<i\end{cases},$$

resultando

$$C=\frac{1}{2\tilde{\bar{x}}n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left[I_{k-i}\right]\left(\tilde{x}_k-\tilde{x}_i\right),$$

que es una fórmula obtenida por Vernizzi (2009). A partir de esta fórmula de Vernizzi se obtiene otra expresión de la seudodiferencia media de Gini

$$SDMG = \Delta' = \frac{\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left[I_{k-i}\right]\left(\tilde{x}_k - \tilde{x}_i\right)}{n^2}.$$

Nosotros definimos la seudodiferencia media de Gini a partir de $c(i,j)$, afirmando que cuando coinciden los dos tipos de órdenes, el de menor a mayor y el orden producido por el desorden, entonces $c(i,j)=1$, y cuando no hay coincidencia de estos órdenes, entonces $c(i,j) = -1$. La función I_{k-i} no está relacionada con nuestra función $c(i,j)$, ya que I_{k-i} sirve para rellenar las cedillas por encima de la diagonal principal, como hemos visto en el ejemplo.

En adelante, utilizaremos tanto la fórmula (5) como la (5′). Veamos un ejemplo.

Una muestra aleatoria de tamaño 1949 de las declaraciones de la renta de las personas físicas (IRPF) de la provincia de Córdoba del año 2006 nos sirve para ilustrar la seudodiferencia media de Gini.

En estos datos hemos encontrado un total de 3.771.908 pares que son compatibles con el orden debido a la renta antes del impuesto y el orden de la renta después del impuesto. El valor medio de las diferencias absolutas entre dichos pares es 18.713,41 euros. El total de pares de datos que dejan de ser compatibles los órdenes es 24.744. El valor medio de las diferencias absolutas entre dichos pares es 960,86 euros.

Si la renta media antes del impuesto es igual a 19.692,5 euros, su diferencia media de Gini es 24.659,46 euros y el índice de Gini es 0,6261, la media de la renta después del impuesto es 16.130,2 euros, su seudodiferencia media de Gini es 18.575,65 euros y el valor del índice de concentración es 0,5758.

5. OTRAS EXPRESIONES DE LOS ÍNDICES DE CONCENTRACIÓN

El índice de concentración de (2) depende de los datos desordenados $\tilde{x}_k$, $k = 1,2,...,n$, y de las ponderaciones $w_k = 2k - 1 - n$.

Otra expresión de estos índices es la siguiente:

$$C = \frac{2\sum_{k=1}^{n}\left(2\left[orden\left(\tilde{x}_k\right)\right] - 1 - n\right)x_k}{2\overline{x}\,n^2}. \tag{8}$$

En esta fórmula (8) vemos que operamos con datos ordenados de menor a mayor, pero modificamos los pesos. Los pesos ahora dependen del orden de los datos desordenados (según su reordenación). Veamos un ejemplo.

Para los datos desordenados $2 \prec 10 \prec 6 \prec 20 \prec 15$, el cálculo del índice de concentración según (2) es

k	$\tilde{x}_k$	$2k-1-5$ = pesos	$(2k-1-5)\ \tilde{x}_k$
1	2	–4	–8
2	10	–2	–20
3	6	0	0
4	20	2	40
5	15	4	60

Siendo el valor del índice de concentración igual a $\frac{72}{265}$, que aproximamos por 0,2716.

Ahora, el cálculo según (8) es:

Tabla 1

k	x_k	$\left[\text{orden}\left(\tilde{x}_k\right)\right]$	$2\left[\text{orden}\left(\tilde{x}_k\right)\right]-1-5$ = pesos	$(2\left[\text{orden}\left(\tilde{x}_k\right)\right]-1-5)\ x_k$
1	2	1	–4	–8
2	6	3	0	0
3	10	2	–2	–20
4	15	5	4	60
5	20	4	2	40

y que resulta el valor ya calculado 0,2716.

Si ahora queremos calcular el índice de Gini, es decir queremos operar con datos ordenados de menor a mayor, el $\text{rango}\left(x_k\right)=k$, los cálculos son:

Tabla 2

k	x_k	$\left[\text{rango}\left(x_k\right)\right]$	$2\left[\text{rango}\left(x_k\right)\right]-1-5$ =pesos	$(2\left[\text{rango}\left(x_k\right)\right]-1-5)\ x_k$
1	2	1	–4	–8
2	6	2	–2	–12
3	10	3	0	0
4	15	4	2	30
5	20	5	4	80

y que resulta un valor de 0,3396.

Si comparamos la tabla 2 con la tabla 1 observamos que el valor 2 no ha cambiado su peso, igual a –4, en ambas tablas. Pero los valores 6 y 10 de la tabla 1 tienen sus pesos 0 y -2, respectivamente, y en la tabla 2, los valores 6 y 10 tiene como pesos -2 y 0, respectivamente. Vemos que los pesos se cambian por el reordenamiento, con órdenes 3 y 2, tabla 1, contrario a 2 y 3, tabla 2. Igual ocurre con los valores de 15 y 20 que tienen órdenes de 5 y 4 en la tabla 1, y ahora sus rangos son 4 y 5, tabla 2, al contrario.

La conclusión a la que llegamos es que la tabla 1 puede construirse cambiando los pesos de la Tabla 2, con datos ordenados de menor a mayor, es decir el par de -2 y 0 lo cambiamos por 0 y -2, y el par de 2 y 4 lo cambiamos por 4 y 2, lo que genera la tabla 1 a partir de la 2.

Si ordenamos los pesos de la tabla 2 de mayor a menor, Tabla 3.

Tabla 3

k	x_k	$\left[\text{rango}(x_k)\right]$	$2\left[\text{rango}(x_k)\right]-1-5$	$(2\left[\text{rango}(x_k)\right]-1-5)\ x_k$
1	2	1	4	8
2	6	2	2	12
3	10	3	0	0
4	15	4	–2	–30
5	20	5	–4	–80

Resulta un valor del índice de concentración igual a –0,3396, como era de esperar, ya que hemos cambiado de signo los pesos originales de la tabla 2. Vemos que hemos cambiado el signo del índice de Gini G.

Veamos de nuevo que los valores de los índices de concentración están en el intervalo $\left[-G,G\right]$. Veamos la siguiente tabla

Tabla 4

k	x_k	$\left[\text{rango}(x_k)\right]$	$2\left[\text{rango}(x_k)\right]-1-5$	Cambiamos los pesos de orden
1	2	1	–4	–2
2	6	2	–2	–4
3	10	3	0	0
4	15	4	2	2
5	20	5	4	4

Los nuevos pesos corresponden a la reordenación $6 \prec 2 \prec 10 \prec 15 \prec 20$, es decir hemos cambiado el orden de los valores 2 y 6 por 6 y 2. Este cambio equivale a modificar los pesos –4 y –2 por –2 y –4. Recordemos de la definición (2) de índice de concentración que los valores reordenados $6 \prec 2 \prec 10 \prec 15 \prec 20$ tienen los pesos –4,–2,0,2,4, respectivamente, es decir al valor 6 le corresponde el peso –4 y al valor 2 corresponde el peso –2, que corresponde a la quinta columna de la Tabla 4.

La diferencia entre los datos ordenados, 2, 6, 10, 15, 20, con los datos desordenados, 6,2,10,15,20, conduce en este ejemplo a que

$$G - C = \frac{1}{\bar{x}25}\left[2\left(-4-(-2)\right)+6\left(-2-(-4)\right)\right] = \frac{1}{\bar{x}25}\left[2(6-2)\right], \tag{9}$$

luego $G > C$.

Los pesos del índice de Gini están ordenados de menor a mayor, en la Tabla 4: –4,–2, 0, 2, 4; si cambiamos dicho orden a una reordenación, como en la columna cinco de la Tabla 4: –2,–4, 0, 2, 4; vemos que el peso –2 ha aumentado para el dato más pequeño 2, mientras que el peso –4 ha disminuido para el dato siguiente, 6, mayor que el primero. Luego con el desorden disminuye el índice de concentración respecto al índice de Gini. En consecuencia, resulta que C, índice de concentración, está en el intervalo $\left[-G, G\right]$.

La expresión (9), dónde hemos intercambiado los pesos –4,–2 por –2,–4, permite obtener el índice de concentración a partir del índice de Gini por medio de la fórmula

$$C = G - \frac{1}{\bar{x}25}\left[2(6-2)\right].$$

En general, para los datos $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$, y los pesos $w_1 < w_2 < \ldots < w_n$, si intercambiamos los pesos $w_i < w_j$ de los valores $x_i < x_j$, respectivamente, por los pesos $w_i' = w_j$ y $w_j' = w_i$, que corresponden a los valores $x_i < x_j$, el valor del índice de concentración C es:

$$C = G - \frac{1}{\bar{x}n^2}\left[\left(w_j - w_i\right)\left(x_j - x_i\right)\right].$$

Si existen otros dos valores $x_k < x_l$ distintos de los anteriores, $x_i < x_j$, con pesos $w_k < w_l$, respectivamente, que se intercambian por los pesos $w_k' = w_l$ y $w_l' = w_k$, el valor de índice de concentración es ahora igual a

$$C = G - \frac{1}{\bar{x}n^2}\left[\left(w_j - w_i\right)\left(x_j - x_i\right) + \left(w_l - w_k\right)\left(x_l - x_k\right)\right].$$

Vemos que estos resultados coinciden con los de la sección (**3**).

Otra aproximación de los comportamientos de *C* y *G* es la debida a Kakwani (1980). Veamos esta aproximación.

A partir de la definición (1) del índice de Gini es fácil deducir la siguiente fórmula:

$$G = \frac{2}{\bar{x}}\operatorname{cov} a\left[\frac{k}{n}, x\right],$$

es decir, G es el producto de $\frac{2}{\overline{x}}$ y la covarianza entre $\frac{k}{n}$, el rango del dato x divido por n, ordenado de menor a mayor, y la variable x.

Igualmente, a partir de la definición (8) se deduce que

$$C = \frac{2}{\overline{x}} \operatorname{cov} a\left[\frac{\operatorname{orden}(\tilde{x}_k)}{n}, x\right],$$

es decir, C es el producto de $\frac{2}{\overline{x}}$ y la covarianza entre $\frac{\operatorname{orden}(\tilde{x}_k)}{n}$, el rango del dato $\tilde{x}_k$ (con valores desordenados) y la variable x (con valores ordenados de menor a mayor).

Ahora es fácil deducir una relación entre ambos índices:

$$C = \frac{\operatorname{Corr}\left[\frac{\operatorname{orden}(\tilde{x}_k)}{n}, x\right]}{\operatorname{Corr}\left[\frac{k}{n}, x\right]} G.$$

siendo "Corr" el coeficiente de correlación.

Cuando no hay desorden en la variable $\tilde{x}$, las dos correlaciones son iguales y entonces $C = G$. Cuando el desorden de $\tilde{x}$ está ordenado de mayor a menor, entonces la $\operatorname{Corr}\left[\frac{\operatorname{orden}(\tilde{x}_k)}{n}, x\right] = -\operatorname{Corr}\left[\frac{k}{n}, x\right]$, luego $C = -G$. Cualquier otra reordenación de $\tilde{x}$ conduce a las desigualdades $-G < C < G$.

6. UNA MEDIDA DE REORDENACIÓN

Cuando relacionamos la progresividad de un impuesto y su impacto sobre la redistribución de la renta después del impuesto, surge la siguiente fórmula debida a Kakwani (1977):

$$G_x - C_z = \left[\frac{\overline{T}}{\overline{z}}\right](C_T - G_x), \tag{10}$$

siendo G_x es el índice Gini para la renta antes del impuesto, C_T es el índice de concentración del impuesto, C_z es el índice de concentración de la renta después del impuesto y $\left[\frac{\overline{T}}{\overline{z}}\right]$ es la proporción del gravamen medio respecto de la renta media después del impuesto. Cuando el impuesto *T* es progresivo C_T aumenta respecto de G_x, con lo que C_z disminuye respecto de G_x, luego disminuye la desigualdad de la renta después del impuesto respecto de la renta antes del impuesto. La fórmula también recoge el cociente $\left[\frac{\bar{T}}{\bar{z}}\right]$, que si aumenta entonces contribuye a la disminución de C_z.

La fórmula (10) aparecía en muchas aplicaciones donde se cambiaba la diferencia $G_x - C_z$ por $G_x - G_z$, una medida de redistribución debida a Reynolds y Smolensky (1977). Ahora bien, la nueva fórmula ya no resultaba ser una identidad.

Será Kakwani (1984) el que proponga una nueva fórmula que resuelva el problema:

$$G_x - G_z = \left[\frac{\bar{T}}{\bar{z}}\right]\left(C_T - G_x\right) - R, \tag{11}$$

donde $R = G_z - C_z$ es una medida de reordenación de las rentas después del impuesto, siendo G_z el índice de Gini de la renta después del impuesto, rentas que están ordenadas de menor a mayor, y C_z es el índice de concentración de la renta después del impuesto. Ahora estas rentas están ordenadas según la renta antes del impuesto, es decir estas rentas son una reordenación de las rentas ordenadas de menor a mayor después del impuesto. El valor R siempre es mayor o igual a cero. La fórmula (11) fue escrita por Kakwani como $G_x - G_z = \left[\frac{\bar{T}}{\bar{z}}\right]\left(C_T - G_x\right) + C_z - G_z$.

Veamos una fórmula de *R* a partir de la seudodiferencia media de Gini del apartado (3).

$$R = \frac{1}{2\bar{z}n^2}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|z_i - z_j\right| - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c\left(i, j\right)\left|\tilde{z}_i - \tilde{z}_j\right|\right], \tag{12}$$

Los valores z_k, *k* = 1, 2, …, *n*, están ordenados de menor a mayor; los valores $\tilde{z}_k$, *k* = 1, 2, …, *n*, son una reordenación de los valores anteriores.

Operando resulta

$$R = \frac{2}{2\bar{z}n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}d\left(i, j\right)\left|\tilde{z}_i - \tilde{z}_j\right|, \tag{13}$$

donde $d\left(i, j\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } c(i, j) = -1 \\ 0 & \text{si } c(i, j) = 1 \end{cases}$.

La fórmula (13) es una medida relativa de dispersión que toma valores en el intervalo $\left[0, 2G_z\right]$, siendo nulo cuando $\tilde{z}_k, k = 1, 2, ..., n$, está ordenado de menor a mayor como $z_k, k = 1, 2, ..., n$. Es igual a $2G_z$ cuando $\tilde{z}_k, k = 1, 2, ..., n$ está ordenado de mayor a menor de $z_k, k = 1, 2, ..., n$, siendo entonces $C_z = -G_z$.

Veamos el ejemplo del apartado (2).

	2	10	6	20	15
2	0	8	4	18	13
10	8	0	–4	10	5
6	4	–4	0	14	9
20	18	10	14	0	–5
15	13	5	9	–5	0

En esta tabla, los valores incompatibles con el orden de menor a mayor son –4 y –5, que se repiten dos veces, y el resto son compatibles. De (13) vemos que los valores positivos de la tabla se anulan, quedando los valores negativos, –4 y –5, que cambian de signo, con los negativos, –4 y –5, que por la diferencia de (12) cambian también de signo. El valor de *R* es en este ejemplo

$$R = \frac{2}{2\overline{z}25}\left[2\left|10-6\right| + 2\left|20-15\right|\right] = \frac{4 \times 9}{2 \times 10,6 \times 25} = 0,0679 .$$

Este valor de *R* corresponde a $R = G_z - C_z = 0,3396 - 0,2716 = 0,0679$. Si dividimos por el máximo de *R*, 2Gz, resulta el valor de 0,1 (10%)

Para la muestra del IRPF de la provincia de Córdoba, el valor de las diferencias de las rentas, después del impuesto, no compatibles con el orden de la renta antes de impuesto es igual a 23.775.719,98 euros, y su total de pares es 24.744. La media de la renta después del impuesto es igual a 16.130,2 euros. El valor de R es, según la fórmula (13), igual a 0,0003803. Si en la fórmula (13) eliminamos la constante $\frac{2}{2\overline{z}n^2}$, y dividimos el resto por el total de pares de valores que no son compatibles con el orden antes del impuesto, resulta el valor de 960,86 euros. Si dividimos por la renta media, 16.130,2 euros, después del impuesto, resulta 0,0595, un 5,95% de la renta media después del impuesto.

Otra expresión de $R = G_z - C_z$ proviene de las fórmulas (1) y (2).

$$R = G_z - C_z = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left(2k - 1 - n\right)\left[\frac{z_k}{\overline{z}} - \frac{\tilde{z}_k}{\overline{z}}\right],$$

que es nula cuando los valores $\tilde{z}_k, k=1,2,...,n$ están ordenados de menor a mayor y por tanto coinciden con los valores $z_k, k=1,2,...,n$. Como ya sabemos $R \geq 0$, y toma valores en el intervalo $\left[0, 2G_z\right]$, ya que $-G_z \leq C_z \leq G_z$.

Si $\tilde{z}_2 = z_1, \tilde{x}_1 = x_2, \tilde{z}_1 = z_2$, para $k=3,4,...,n$, el valor de R es:

$$R = \frac{2}{n^2}\left[\frac{z_2}{\bar{z}} - \frac{z_1}{\bar{z}}\right].$$

En general, $\tilde{z}_j = z_i, \tilde{z}_i = z_j$, $z_j > z_i, z_k = \tilde{z}_k$, para $k \neq i, j$, el valor de R es:

$$R = \frac{2}{n^2}\left[\frac{z_j}{\bar{z}} - \frac{z_i}{\bar{z}}\right](j-i).$$

7. DESCOMPOSICIONES DEL ÍNDICE DE GINI EN DOS GRUPOS

En el presente apartado vamos a recoger los trabajos de Farhad Mehran (1975) y Camilo Dagum (1997).

Mehran presentó un trabajo sobre la descomposición del índice de Gini en la 40th Session, en Warsaw, del congreso organizado por la International Statistical Institute, y apareció publicado en su Bulletin en 1975.

En primer lugar, Mehran descompuso el índice de Gini para el caso de dos grupos y, en segundo lugar, para k grupos, usando una aproximación continua.

Mehran partió de la siguiente definición del índice de Gini:

$$G(F) = \frac{1}{\mu}\int_a^b F(x)\left[1 - F(x)\right]dx, \tag{14}$$

siendo $F(x)$ la función de distribución de la población.

La fórmula (14) proviene de la siguiente integral doble

$$G(F) = \frac{\int_a^b \int_a^b |x-y| f(x) f(y) dxdy}{2\mu},$$

que al ser $|x-y| = x + y - 2 \times \min[x, y]$, la integral es igual a

$$2\mu - 2\int_a^b \int_a^b \min[x, y] f(x) f(y) dxdy, \tag{15}$$

donde la nueva integral doble es el valor esperado del mínimo de dos variables aleatorias independientes con la misma función de distribución. La función de distribución del mínimo de estas variables es igual a

$$F_{\min}(z) = 1 - (1 - F(z))^2,$$

y (15) se escribe como

$$G(F) = \frac{2\left[\int_a^b [1 - F(x)]dx - \int_a^b [1 - F(x)]^2 dx\right]}{2\mu} = \frac{\int_a^b F(x)[1 - F(x)]dx}{\mu}.$$

A continuación, Mehran va a descomponer el índice de Gini de una población en dos grupos.

Para el caso de dos subpoblaciones o grupos, Mahren propone el siguiente modelo de mixtura

$$F(x) = p_1 F_1(x) + p_2 F_2(x),$$

que es una mezcla de los dos grupos, siendo p_1 y p_2 las proporciones de individuos de cada uno de estos grupos.

Los índices de Gini de cada grupo son:

$$G(F_1) = \frac{1}{\mu_1}\int_a^b F_1(x)[1 - F_1(x)]dx \quad \text{y} \quad G(F_2) = \frac{1}{\mu_2}\int_a^b F_2(x)[1 - F_2(x)]dx.$$

Los límites de las integrales serán $a = 0$ y $b = +\infty$.

Para medir la desigualdad entre dos grupos Mehran define el siguiente índice

$$G(F_1, F_2) = \frac{E|x_1 - x_2|}{\mu_1 + \mu_2}, \tag{16}$$

que mide la desigualdad entre las dos funciones de distribución (*inequality across two distributions*), y que debe distinguirse de la "desigualdad entre dos distribuciones" que está basado en la comparación de los valores esperados de las variables aleatorias x_1 y x_2 de cada grupo.

La fórmula (16), que es una integral doble, puede escribirse como

$$G(F_1, F_2) = \frac{\int_a^b \left[F_1(x)(1 - F_2(x)) + F_2(x)(1 - F_1(x))\right] dx}{\mu_1 + \mu_2}. \tag{17}$$

La expresión (17) proviene de la identidad $|x_1 - x_2| = x_1 + x_2 - 2 \times \min[x_1, x_2]$, y consiste en calcular la función de distribución del mínimo de las variables x_1 y x_2, variables que son independientes con funciones de distribución $F_1(x)$ y $F_2(x)$.

La función de distribución del mínimo de estas variables es igual a

$$F_{\min}(z) = 1 - [1 - F_1(x)][1 - F_2(x)],$$

siendo $E|x_1 - x_2|$ igual a

$$E|x_1 - x_2| = \mu_1 + \mu_2 - 2\int_a^b [1 - F_1(x)][1 - F_2(x)]\, dx,$$

luego

$$E|x_1 - x_2| = \int_a^b \left[F_1(x)(1 - F_2(x)) + F_2(x)(1 - F_1(x)) \right] dx, \tag{18}$$

que es el numerador de la fórmula (17).

Con estas definiciones ya podemos pasar a la descomposición en dos grupos del índice de Gini según Mehran.

Primero partimos de

$$\mu G(F) = \int_a^b F(x)[1 - F(x)]dx, \text{ y de } F(x) = p_1 F_1(x) + p_2 F_2(x).$$

Sustituyendo $F[z]$ en el índice de Gini de la población, resulta:

$$\mu G(F) = \int_a^b (p_1 F_1(x) + p_2 F_2(x))\left[1 - (p_1 F_1(x) + p_2 F_2(x))\right].$$

Al ser $p_1 + p_2 = 1$, resulta:

$$\mu G(F) = \int_a^b (p_1 F_1(x) + p_2 F_2(x))\left[p_1(1 - F_1(x)) + p_2(1 - F_2(x)) \right].$$

Operando dentro de la integral, resulta:

$$\begin{aligned} \mu G(F) = {} & p_1^2 \int_a^b F_1(x)(1 - F_1(x))dx + p_2^2 \int_a^b F_2(x)(1 - F_2(x))dx \\ & + p_1 p_2 \int_a^b \left[F_1(x)(1 - F_2(x)) + F_2(x)(1 - F_1(x)) \right] dx \end{aligned}$$

Pero

$$p_1^2 \int_a^b F_1(x)(1 - F_1(x))dx = p_1^2 \mu_1 G(F_1)$$

$$p_2^2 \int_a^b F_2(x)(1 - F_2(x))dx = p_2^2 \mu_2 G(F_2)$$

Y también

$$p_1 p_2 \int_a^b \left[F_1(x)\left(1 - F_2(x)\right) + F_2(x)\left(1 - F_1(x)\right) \right] dx = p_1 p_2 \left(\mu_1 + \mu_2\right) G\left(F_1, F_2\right).$$

En consecuencia:

$$G(F) = p_1 \frac{n_1 \mu_1}{n\mu} G(F_1) + p_2 \frac{n_2 \mu_2}{n\mu} G(F_2) + \frac{p_1 p_2 \left(\mu_1 + \mu_2\right)}{\mu} G\left(F_1, F_2\right).$$

Y al ser

$$s_1 = \frac{n_1 \mu_1}{n\mu}, s_2 = \frac{n_2 \mu_2}{n\mu}, \ \frac{p_1 p_2 \left(\mu_1 + \mu_2\right)}{\mu} = p_1 s_2 + p_2 s_1,$$

obtenemos la descomposición de la población en dos grupos:

$$G(F) = p_1 s_1 G(F_1) + p_2 s_2 G(F_2) + \left(p_1 s_2 + p_2 s_1\right) G\left(F_1, F_2\right), \tag{19}$$

donde la desigualdad **Dentro** es $p_1 s_1 G(F_1) + p_2 s_2 G(F_2)$, y la desigualdad **Entre** es $\left(p_1 s_2 + p_2 s_1\right) G\left(F_1, F_2\right)$.

Dagum (1997) obtiene la descomposición (19) de Mehran a partir de la diferencia media de Gini de toda la población, de cada grupo y de entre los dos grupos.

Veamos sus fórmulas.

Primero, para toda la población, Dagum parte de la fórmula

$$\Delta = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \left| y_i - y_r \right|}{n^2},$$

que es la diferencia media de Gini de una población con n individuos de una variable Y no negativa. En el caso continuo, la fórmula es

$$\Delta = \int_a^b \int_a^b \left| x - y \right| f(x) f(y) dxdy,$$

donde $f(x)$ es la función de densidad de la población.

Para descomponer la población en dos grupos, Dagum define los datos del grupo 1 como y_{1i}, con $i = 1, 2, ..., n_1$, siendo la diferencia media de Gini del grupo 1 igual a

$$\Delta_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} \sum_{r=1}^{n_1} \left| y_{1i} - y_{1r} \right|}{n_1^2}.$$

La fórmula para el caso continuo es

$$\Delta_1 = \int_c^d \int_c^d |x-y| f_1(x)\, f_1(y)\, dxdy\,.$$

Y para el grupo 2 define los datos como y_{2i}, con $i = 1, 2, ..., n_2$, siendo la diferencia media de Gini del grupo 2 igual a

$$\Delta_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_2}\sum_{r=1}^{n_2} |y_{2i} - y_{2r}|}{n_2^2}\,.$$

La fórmula para el caso continuo es

$$\Delta_2 = \int_u^v \int_u^v |x-y| f_2(x)\, f_2(y)\, dxdy\,.$$

Y la diferencia media de Gini entre los dos grupos es

$$\Delta_{12} = \frac{\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{r=1}^{n_2} |y_{1i} - y_{2r}|}{n_1 n_2}\,,$$

donde $\Delta_{12} = \Delta_{21}$.

La fórmula para el caso continuo es

$$\Delta_{12} = \int_c^d \int_u^v |x-y| f_1(x)\, f_2(y)\, dxdy\,.$$

La descomposición de la población en dos grupos supone el siguiente modelo de mixtura de dos poblaciones:

$$f(x) = p_1 f_1(x) + p_2 f_2(x),$$

donde p_1 y p_2 son las proporciones de individuos en cada grupo. Teóricamente son las probabilidades de seleccionar individuos de cada grupo

La densidad conjunta de dos realizaciones independientes es:

$$f(x)\, f(y) = p_1^2 f_1(x)\, f_1(y) + p_2^2 f_2(x)\, f_2(y) + 2 p_1 p_2 f_1(x)\, f_2(y),$$

que conduce a la siguiente descomposición de las distintas diferencias de medias de Gini

$$\Delta = p_1^2 \Delta_1 + p_2^2 \Delta_2 + 2 p_1 p_2 \Delta_{12}\,.$$

Usando los distintos índices de Gini, resulta la descomposición siguiente:

$$G = p_1 s_1 G_1 + p_2 s_2 G_2 + \left(p_1 s_2 + p_2 s_1\right) G_{12}\,, \tag{20}$$

que coincide con (19).

La descomposición (20) corresponde a un análisis de la varianza cuando los valores de uno de los grupos son superiores a los valores del otro grupo, es decir los valores de un grupo no están en el recorrido de los valores del otro grupo. También, los dos grupos no se cortan. En este caso la descomposición (19) es igual a:

$$G = G_w + G_{gb}, \quad \text{donde} \quad G_w = p_1 s_1 G_1 + p_2 s_2 G_2 \ \text{y} \ G_{gb} = \left(p_1 s_2 + p_2 s_1\right) G_{12} .$$

Si suponemos que el grupo 2 tiene todos sus valores mayores que los del grupo 1, entonces $\Delta_{12} = \mu_2 - \mu_1$, donde $\mu_2 > \mu_1$.

Como $\left(p_1 s_2 + p_2 s_1\right) = p_1 p_2 \left[\dfrac{\mu_1 + \mu_2}{\mu}\right]$, entonces $G_{gb} = p_1 p_2 \left[\dfrac{\mu_2 - \mu_1}{\mu}\right]$ y, en este caso, se toma la diferencia de las dos medias y no las diferencias entre los valores del grupo 2 y del grupo 1. Luego $G_{gb} = G_B$, donde G_B es el índice de Gini entre las medias de los dos grupos.

Cuando los grupos se cortan o un valor del grupo1 está en el recorrido del grupo 2, entonces $\Delta_{12} \neq \mu_2 - \mu_1$. En esta nueva situación, Dagum descompone Δ_{12} en la suma de dos cantidades $\Delta_{12} = d_{12} + t_{12}$. Veamos en primer lugar la cantidad t_{12}.

La cantidad t_{12} recoge la "transvariación" entre los grupos, un concepto propuesto por Gini (1916). Cuando seleccionamos un valor y_{1i} del grupo1 y otro valor y_{2r} del grupo 2, de forma independiente, y resulta que $y_{1i} > y_{2r}$, suponiendo que $\mu_2 > \mu_1$, Gini llama a la diferencia positiva $y_{1i} - y_{2r} > 0$ "transvariación". Si dividimos la suma de todas estas transvariaciones por el producto de los tamaños de los dos grupos, Gini llama a este promedio "la intensidad promedio de transvariación".

Cuando $\mu_2 > \mu_1$, la intensidad promedio de transvariación es igual a

$$t_{12} = \int_0^{\infty} F_2(x)\left(1 - F_1(x)\right) dx .$$

La otra cantidad, d_{12}, surge cuando seleccionamos un valor y_{1i} del grupo 1 y otro valor y_{2r} del grupo 2, de forma independiente, y resulta que $y_{1i} - y_{2r} < 0$, que es compatible con $\mu_2 > \mu_1$. Si dividimos el total de sumas de todas estas diferencias, $y_{1i} - y_{2r} < 0$, que son compatibles con el orden de las medias, con el producto de los tamaños de los grupos, Dagum llama intensidad promedio del "gross eonomic affluence".

La intensidad promedio del "gross eonomic affluence" es igual a

$$d_{12} = \int_0^{\infty} F_1(x)\left(1 - F_2(x)\right) dx .$$

Estas dos últimas fórmulas verifican la siguiente igualdad: $d_{12} - t_{12} = \mu_2 - \mu_1$, y la siguiente equivalencia $d_{12} > t_{12} \leftrightarrow \mu_2 > \mu_1$, es decir que cuando $\mu_2 > \mu_1$, entonces $d_{12} > t_{12}$, que conduce a las fórmulas que permiten calcular d_{12} y t_{12}.

De la fórmula (17), resulta que $\Delta_{12} = d_{12} + t_{12}$.

A continuación, Dagum descompone Δ_{12} en: $\Delta_{12} = d_{12} - t_{12} + 2t_{12}$, donde $d_{12} - t_{12} = \mu_2 - \mu_1$, diferencia que es positiva porque $\mu_2 > \mu_1$.

Ahora ya podemos descomponer $G_{gb} = \frac{p_1 p_2}{\mu} \Delta_{12}$,

$$G_{gb} = \frac{p_1 p_2}{\mu} \Delta_{12} = \frac{p_1 p_2}{\mu} \left[d_{12} - t_{12} \right] + \frac{p_1 p_2}{\mu} \left[2t_{12} \right] = G_{nb} + G_t .$$

De la descomposición $G_{gb} = G_{nb} + G_t$, resulta que $G_{nb} = G_B$, donde G_B compara los dos grupos mediante sus medias.

En cuanto a G_t, la intensidad promedio de transvariación, mide la intersección de los dos grupos. Cuando $G_t = 0$, el grupo 2, con mayor media, tiene todos sus valores mayores que los del grupo 1.

Concluimos así la propuesta de Dagum de la descomposición de un índice de Gini en tres componentes:

$$G = G_w + G_B + G_t . \tag{21}$$

Volviendo al trabajo de F. Mehran, puede verse, en primer lugar, que propone $G_{nb} = G_B$ y la siguiente fórmula:

$$\bar{G}(F_1, F_2) = \frac{1}{\mu_1 + \mu_2} \left[E|X_1 - X_2| - |\mu_1 - \mu_2| \right]. \tag{22}$$

Mehran interpreta esta expresión como: "It should be note that (22) can be interpreted as a measure of the extend of income domination of one group over the other".

La expresión (22) es igual a

$$\bar{G}(F_1, F_2) = \frac{1}{\mu_1 + \mu_2} \left[d_{12} + t_{12} - \left(d_{12} - t_{12} \right) \right] = \frac{1}{\mu_1 + \mu_2} \left[2t_{12} \right],$$

que por (16) equivale a

$$\bar{G}(F_1, F_2) = G(F_1, F_2) - \frac{|\mu_1 - \mu_2|}{\mu_1 + \mu_2},$$

y permite descomponer G_{gb} en

$$G_{gb} = \left(p_1 s_2 + p_2 s_1\right) G_{12} = \frac{p_1 p_2}{\mu}\left(\mu_1 + \mu_2\right)\left[\bar{G}\left(F_1, F_2\right) + \frac{\left|\mu_1 - \mu_2\right|}{\mu_1 + \mu_2}\right],$$

que podemos escribir como

$$G_{gb} = \frac{p_1 p_2}{\mu}\left[2t_{12} + \left(d_{12} - t_{12}\right)\right],$$

y que nos lleva a la descomposición (21) de Dagum.

La generación de la descomposición a *k* grupos lo recogeremos en el apartado 9 del presente trabajo

8. UNA DESCOMPOSICIÓN DE UN ÍNDICE DE CONCENTRACIÓN

Vamos a descomponer la medida de concentración (7) definida a partir de la seudodiferencia media de Gini siguiendo a Dagum (1997).

En primer lugar, vamos a considerar un ejemplo con dos grupos **que no tienen reordenación entre los grupos**. Suponemos que los datos están ordenados según otra variable, como el caso del impuesto ordenado por la renta antes del impuesto, siendo el nuevo orden

$$8 \prec 2 \prec 10 \prec 15 \prec 25 \prec 30 \prec 40 \prec 35 \prec 48 \prec 50 .$$

Los subgrupos son: Gr1: $8 \prec 2 \prec 10 \prec 15 \prec 25$, y Gr2: $30 \prec 40 \prec 35 \prec 48 \prec 50$ con tamaños $n_1 = 5$ y $n_2 = 5$.

	j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
i		8	2	10	15	25	30	40	35	48	50
1	8	0	–6	2	7	17	22	32	27	40	42
2	2	–6	0	8	13	23	28	38	33	46	48
3	10	2	8	0	5	15	20	30	25	38	40
4	15	7	13	5	0	10	15	25	20	33	35
5	25	17	23	15	10	0	5	15	10	23	25
6	30	22	28	20	15	5	0	10	5	18	20
7	40	32	38	30	25	15	10	0	–5	8	10
8	35	27	33	25	20	10	5	–5	0	13	15
9	48	40	46	38	33	23	18	8	13	0	2
10	50	42	48	40	35	25	20	10	15	2	0

En la descomposición se observan los dos grupos: Gr1, con media $\bar{\bar{x}}_1 = 12$, y Gr2, con media $\bar{\bar{x}}_2 = 40,6$, con seudodiferencias medias de Gini de cada grupo.

$$\Delta'_1 = \frac{\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5} c(i,j)\left|\tilde{x}_i - \tilde{x}_j\right|}{n_1^2} = 7,52$$

$$\Delta'_2 = \frac{\sum_{i=6}^{10}\sum_{j=6}^{10} c(i,j)\left|\tilde{x}_i - \tilde{x}_j\right|}{n_2^2} = 7,68\ .$$

Siguiendo a Dagum (1980 y 1985), la seudodiferencia media de Gini entre los grupos 1 y 2 es

$$\Delta'_{12} = \frac{\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=6}^{10} c(i,j)\left|\tilde{x}_i - \tilde{x}_j\right|}{n_1 n_2} = 28,6\ ,$$

Otra expresión de esta distancia es

$$\Delta'_{12} = \frac{\sum_{i=1}^{n_2}\sum_{j=1}^{n_1}\left(\tilde{x}_{i2} - \tilde{x}_{j1}\right)}{n_1 n_2}\ ,$$

donde el subíndice 2 recoge los valores del grupo 2 y el subíndice 1 recoge los valores el grupo 1. Siendo $\Delta'_{12} = \bar{X}_2 - \bar{X}_1$. Si intercambiamos los grupos, la fórmula es

$$\Delta'_{21} = -\frac{\sum_{j=1}^{n_1}\sum_{i=1}^{n_2}\left(\tilde{x}_{j1} - \tilde{x}_{i2}\right)}{n_2 n_1}\ ,$$

siendo $\Delta'_{21} = \Delta'_{12}$.

Cuando no hay reordenación entre los dos grupos, entonces $\Delta'_{12} = \Delta_{12}$, siendo

$$\Delta_{12} = \frac{\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=6}^{10}\left|\tilde{x}_i - \tilde{x}_j\right|}{n_1 n_2}\ ,$$

ya que cada valor del grupo 2 supera a todos los valores del grupo 1, como se muestra en el presente ejemplo.

De la identidad $n^2\Delta' = n_1^2\Delta'_1 + n_2^2\Delta'_2 + 2n_1 n_2\Delta'_{12}$, se obtiene las siguientes descomposiciones de Dagum para Δ'

$$\Delta' = p_1 p_1 \Delta_1' + p_2 p_2 \Delta_2' + 2 p_1 p_2 \Delta_{12}' ,$$

y para el índice de concentración C

$$C = C_1 p_1 s_1 + C_2 p_2 s_2 + C_{12}\left(p_1 s_2 + p_2 s_1\right), \tag{23}$$

donde $C = \dfrac{\Delta'}{2\bar{X}}$, $C_1 = \dfrac{\Delta_1'}{2\bar{X}_1}$ y $C_2 = \dfrac{\Delta_2'}{2\bar{X}_2}$ y siendo $p_1 = \dfrac{n_1}{n}$, $p_2 = \dfrac{n_2}{n}$, $s_1 = \dfrac{n_1\bar{X}_1}{n\bar{X}}$, $s_2 = \dfrac{n_2\bar{X}_2}{n\bar{X}}$, $C_{12} = \dfrac{\Delta_{12}'}{\left(\bar{X}_1 + \bar{X}_2\right)}$ y $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} p_i s_j = 1$.

La primera parte de la descomposición, llamada **Dentro**, es $C_w = C_1 p_1 s_1 + C_2 p_2 s_2$, y su valor es 0,072243346, que proviene de los valores siguientes.

p1	0,5
p2	0,5
s1	0,22813688
s2	0,77186312
C1	0,31333333
C2	0,0945812
C	0,3441064

La segunda parte de la descomposición es $C_{gb} = C_{12}\left(p_1 s_2 + p_2 s_1\right)$, que es igual a $C_{gb} = \dfrac{n_1 n_2\left(\bar{X}_2 - \bar{X}_1\right)}{\bar{X}\, n^2} = G_B$, siendo G_B el índice de Gini de las dos medias ponderadas, ya que $p_1 s_2 + p_2 s_1 = \dfrac{n_1 n_2\left[\bar{X}_1 + \bar{X}_2\right]}{n^2 \bar{X}}$, donde $\bar{X}_1 = 12$, $\bar{X}_2 = 40,6$ y $\bar{X} = 26,3$, y se deduce que $C_{gb} = p_1 - s_1$. El valor de $\Delta' = \dfrac{1.810}{100} = 18,1$. El valor de **Entre** es $C_{gb} = 0,2718631$.

Vemos que C_{gb} representa el 79,005% del índice de concentración global C. Además, se observa que C_{gb} es la diferencia entre la proporción de individuos que están en el Gr.1, igual a 0.5, y la proporción del total de valores de la variable en el Gr1 respecto del total de valores de la variable en ambos grupos, 0,22813688. La fórmula $C_{gb} = p_1 - s_1$ es la misma que la obtenida por (C. Costa, 2009) cuando se utiliza la diferencia media de Gini, y no hay reordenación entre los dos grupos.

Veamos a continuación **dos grupos con reordenación entre ellos**.

El orden de los datos es ahora:

$$8 \prec 2 \prec 10 \prec 15 \prec 30 \prec 25 \prec 40 \prec 35 \prec 48 \prec 50 .$$

	j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
i		8	2	10	15	30	25	40	35	48	50
1	8	0	–6	2	7	22	17	32	27	40	42
2	2	–6	0	8	13	28	23	38	33	46	48
3	10	2	8	0	5	20	15	30	25	38	40
4	15	7	13	5	0	15	10	25	20	33	35
5	30	22	28	20	15	0	–5	10	5	18	20
6	25	17	23	15	10	–5	0	15	10	23	25
7	40	32	38	30	25	10	15	0	–5	8	10
8	35	27	33	25	20	5	10	–5	0	13	15
9	48	40	46	38	33	18	23	8	13	0	2
10	50	42	48	40	35	20	25	10	15	2	0

Vemos que el Gr.2 tiene el valor 25 en el recorrido del Gr.1 y, también, el Gr.1 tiene el valor 30 en el recorrido del Gr.2, es decir ahora existe reordenación entre estos dos grupos. La media del grupo Gr1 es 13, y la del grupo Gr2 es 39,6.

Los resultados son:

$$\Delta_1' = \frac{\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5} c(i,j)\left|\tilde{x}_i - \tilde{x}_j\right|}{n_1^2} = 9{,}12 = 2\sum_{k=1}^{5-1}\left(\tilde{x}_{k+1} - \tilde{x}_k\right)\frac{k}{5}\left[1 - \frac{k}{5}\right].$$

y

$$\Delta_2' = \frac{\sum_{i=6}^{10}\sum_{j=6}^{10} c(i,j)\left|\tilde{x}_i - \tilde{x}_j\right|}{n_2^2} = 9{,}28 .$$

La seudodiferencia media de Gini entre los grupos 1 y 2 es

$$\Delta_{12}' = \frac{\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=6}^{10} c(i,j)\left|\tilde{x}_i - \tilde{x}_j\right|}{n_1 n_2} = 26{,}6 ,$$

que coincide con Δ'_{21}. Cuando hay reordenación entre los dos grupos, Δ'_{12} no coincide con Δ_{12}, ya que $\Delta_{12} = 27$, mientras que $\Delta'_{12} = 26,6$.

Veamos ahora la descomposición de la concentración C.

1) $C_w = C_1 p_1 s_1 + C_2 p_2 s_2$ es la parte denominada **Dentro**.

2) $C_{gb} = C_{12}\left(p_1 s_2 + p_2 s_1\right) = \dfrac{\left(p_1 s_2 + p_2 s_1\right)}{\left(\bar{X}_1 + \bar{X}_2\right)} \dfrac{\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=6}^{10} c(i,j)\left|\tilde{x}_i - \tilde{x}_j\right|}{n_1 n_2}$ es la parte denominada **Entre**. Es fácil probar que $\mathrm{C_{gb}} = p_1 - s_1$, y si ordenamos los dos grupos de menor a mayor según sus medias resulta que $C_{gb} = \dfrac{n_1 n_2\left(\bar{X}_2 - \bar{X}_1\right)}{\bar{X}\, n^2} = G_B$, siendo G_B el índice de Gini de las dos medias ponderadas ordenadas de menor a mayor.

Para descomponer la parte **Entre** vamos a partir de Δ'_{12}:

$$\Delta'_{12} = \frac{\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=6}^{10} c(i,j)\left|\tilde{x}_i - \tilde{x}_j\right|}{n_1 n_2},$$

y vamos a considerar todos los pares de valores, de un total de $n_1 n_2 = 25$, con un valor del Gr.2 y otro del Gr.1, es decir $\left(\tilde{x}_{2j}, \tilde{x}_{1i}\right)$, tal que la diferencia sea $\tilde{x}_{2j} - \tilde{x}_{1i} > 0$, compatible con la diferencia entre las medias de los grupos, es decir que $\bar{X}_2 - \bar{X}_1 > 0$. Para el ejemplo, la suma de todas estas diferencias dividida por 25, es igual a $\frac{670}{25}$ (Dagum llama "the gross economic affluence") y que denominamos por $d_{12} = \frac{670}{25}$. Igualmente vamos a considerar todos los pares de valores, un de total de $n_1 n_2 = 25$, con un valor del Gr.2 y otro del Gr.1, es decir $\left(\tilde{x}_{2j}, \tilde{x}_{1i}\right)$, tal que la diferencia es $\tilde{x}_{2j} - \tilde{x}_{1i} < 0$ no compatible con la diferencia entre las medias de los grupos, al ser $\bar{X}_2 - \bar{X}_1 > 0$, y que calculamos como $t_{12} = \frac{5}{25}$. Ahora, la descomposición de Δ'_{12} es $\Delta'_{12} = d_{12} - t_{12}$, que es igual a $\Delta'_{12} = \frac{670}{25} - \frac{5}{25}$. Una explicación del valor 5 de $t_{12} = \frac{5}{25}$ se debe al concepto de "transvariazione" introducido por Gini (1916). Recordemos que la media del grupo GR.1 es $\bar{X}_1 = 13$ y la del grupo Gr.2 es $\bar{X}_2 = 39,6$. Si ahora seleccionamos un par de valores, donde uno es del grupo 1, x_{1i}, y otro del grupo 2, x_{2j}, tal que la diferencia entre $x_{2j} - x_{1i}$ sea negativa, cuando la diferencia entre las medias de los dos grupos, $\bar{X}_2 - \bar{X}_1$, es positiva, diremos que se ha producido una transvariación. Cuando ocurre una transvariación, el valor x_{1i} del grupo 1 está en el recorrido de los valores del grupo 2 ya que $x_{1i} > x_{2j}$. Cuando $t_{12} = 0$ entonces los dos grupos no tienen reordenación entre ellos.

Cuando operamos con la diferencia media de Gini, se prueba que $\Delta_{12} = \left(\bar{X}_2 - \bar{X}_1\right) + 2t_{12} = \left(d_{12} - t_{12}\right) + 2t_{12}$, es decir Δ_{12}, que es igual a $d_{12} + t_{12}$, y que descomponemos en la suma de $d_{12}-t_{12}$ y $2t_{12}$. Esta descomposición de Δ_{12} conduce a la siguiente descomposición: $G_{gb}=G_B+G_t$, donde G_B mide las diferencias entre los dos grupos y G_t es una medida de reordenación entre los dos grupos (Maria Monti; 2007, 2009).

De la descomposición de Δ_{12}, vemos que, si la media del grupo 1 es mayor que la del grupo 2, entonces $d_{12}-t_{12}<0$, que se evita ordenando las medias de menor a mayor. En cuanto a usar el doble de t_{12}, conduce a elevar G_t sin que aumenten las transvariciones.

Si volvemos a los índices de concentración, **una opción** para descomponer $\Delta'_{12}=\left(\bar{X}_2-\bar{X}_1\right)$ es: $\Delta'_{12}=\left(d_{12}-2t_{12}\right)+t_{12}$, ya que $\Delta'_{12}=\left(\bar{X}_2-\bar{X}_1\right)=d_{12}-t_{12}$. Ahora, la descomposición de C_{gb} es $C_{gb}=C_{nb}+C_t$, donde

$$C_{nb}=\frac{\left(p_1s_2+p_2s_1\right)}{\left(\bar{X}_1+\bar{X}_2\right)}\left[d_{12}-2t_{12}\right]=\frac{n_1n_2}{n^2\bar{X}}\left[\frac{670}{25}-\frac{2\times 5}{25}\right]. \tag{24}$$

y

$$C_t=\frac{\left(p_1s_2+p_2s_1\right)}{\left(\bar{X}_1+\bar{X}_2\right)}\left[t_{12}\right]=\frac{n_1n_2}{n^2\bar{X}}\left[\frac{5}{25}\right]. \tag{25}$$

La expresión (24) mide la diferencia entre d_{12} y $2t_{12}$, mientras que (25) mide la reordenación entre los dos grupos, es decir la cantidad de valores del grupo 1 que están en el recorrido de los valores del grupo 2.

Con las fórmulas (24) y (25) podemos descomponer un índice de concentración C en dos grupos con reordenación:

$$C=C_w+C_{nb}+C_t. \tag{26}$$

En ejemplo vemos que el par de valores $(30,25)$, donde 30 está en el grupo 1 y 25 está en el grupo 2, cumplen que 25 – 30 = –5, mientras que $\bar{X}_2-\bar{X}_1>0$, produce una transvariación con **intensidad promedio** igual a (30 – 25)/25, y que denominamos t_{12}, donde 25 es el total de todos los posibles pares, cada uno de Gr.1 y el otro de Gr.2.

En el ejemplo, tenemos los siguientes resultados:

p1	0,5
p2	0,5
s1	0,247148289
s2	0,752851711
p1s2 + p2s1	0,5
C1	0,350769231

C2	0,117171717
C	0,340304183

donde $C_w = 0,08745$ la medida de concentración **Dentro**. El valor de **Entre** es igual a $C_{gb} = 0,25285171$.

La descomposición de C_{gb} es: C_{nb}=0,25095057 y $C_t = 0,00190114$. Se prueba que $C_{nb} = p_1 - s_1 - C_t$. Dagum denomina a C_{nb} "la contribución neta a la desigualdad **entre** grupos", ya que hemos eliminado C_t de C_{gb}. En nuestro caso, cuando hay reordenación entre los dos grupos entonces C_{nb} no coincide con G_B. En cambio, en el caso del índice de Gini, Maria Monti (2007, 2009) prueba que $G_{nb} = G_B$. También, si $G_{gb} = G_B + G_t$ para un índice de Gini, en nuestro caso $C_{gb} = G_B$. El índice de reordenación entre dos grupos, G_t, suele llamarse *R*, que proviene de la reordenación entre grupos.

Una fórmula para calcular la intensidad proporcional de transvariación es

$$\frac{\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=6}^{10}\left|\tilde{x}_i - \tilde{x}_j\right| - \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=6}^{10} c(i,j)\left|\tilde{x}_i - \tilde{x}_j\right|}{2n_1n_2} = \frac{5}{n_1n_2} = t_{12},$$

es decir que $\Delta'_{12} = \Delta_{12} - \dfrac{2\times 5}{n_1n_2}$, luego

$$C_{gb} = \frac{n_1n_2}{n^2\bar{X}}\left[\Delta_{12} - \frac{2\times 5}{n_1n_2}\right] = \frac{n_1n_2}{n^2\bar{X}}\left[\frac{675 - 2\times 5}{25}\right] = \frac{n_1n_2}{n^2\bar{X}}\left[\frac{670-5}{25}\right], \qquad (27)$$

que es la suma de (24) y (24). El cociente $\dfrac{670}{25}$ lo denominamos d_{12}. Así, podemos escribir $C_{nb} = \dfrac{n_1n_2}{n^2\bar{X}}\left[d_{12} - 2t_{12}\right]$, $C_t = \dfrac{n_1n_2}{n^2\bar{X}}t_{12}$ y $C_{gb} = \dfrac{n_1n_2}{n^2\bar{X}}\left[d_{12} - t_{12}\right]$, ya que $\Delta'_{12} = d_{12} - t_{12}$.

Cuando $C_t = 0$, entonces no hay reordenación entre los dos grupos, luego $G_{gb} = C_{nb}$.

Hemos visto que cuando hay reordenación entre los dos grupos, entonces $\Delta_{12} = 27$ es distinto de $\Delta'_{12} = 26,6$. También, se prueba que $d_{12} - t_{12} = \bar{X}_2 - \bar{X}_1 = \Delta'_{12} = 26,6$. Al ser $\Delta_{12} = d_{12} + t_{12}$, resulta la expresión $\Delta_{12} = 2t_{12} + \bar{X}_2 - \bar{X}_1 = 0,4 + 26,6 = 27$. Si $\bar{X}_2 - \bar{X}_1 = 0$, entonces $t_{12} = d_{12}$, luego $\Delta_{12} = 2t_{12}$. Cuando $t_{12} = 0$, entonces $\Delta'_{12} = \Delta_{12} = \bar{X}_2 - \bar{X}_1$.

Nota: La descomposición (26) es casi la misma descomposición que la del índice de Gini en el caso de dos grupos, a saber $G = G_w + G_{gb}$ y $G_{gb} = G_{nb} + G_t$. La diferencia está en los índices C_{gb} y G_{nb}, ya que $C_{gb} = G_B$ y $\mathrm{G}_{\mathrm{nb}} = G_B$ (Maria Monti, 2007).

Cuando $d_{12} > 2t_{12}$, entonces $C_{nb} > 0$. Si $d_{12} = 2t_{12}$, entonces $C_{nb} = 0$. Y si $d_{12} < 2t_{12}$, entonces $C_{nb} < 0$. Cuando $d_{12} = t_{12}$, $\Delta'_{12} = 0$, siendo $C_{gb} = 0$, luego sólo existe Dentro. Cuando $d_{12} < \mathrm{t}_{12}$, entonces $C_{gb} < 0$.

Dagum introduce una distancia a partir de d_{12} "the gross economic affluence" y t_{12} la intensidad relativa de las transvariaciones (caso de dos grupos). Para el caso de un índice de concentración, nosotros introducimos la siguiente seudodistancia

$$D_{12} = 1 - \frac{t_{12}}{\Delta'_{12}} = \frac{d_{12} - 2t_{12}}{\Delta'_{12}},$$

que Dagum llama "the relative economic affluence" y suponemos que $\Delta'_{12} > 0$. Ahora, $D_{12} = 1$ siempre y cuando $t_{12} = 0$. Y $D_{12} = 0$ siempre y cuando $d_{12} - 2t_{12} = 0$, siendo $C_b = 0$. El recorrido D_{12} está en el intervalo $(-\infty, 1]$, siendo cada vez más negativo a medida de que d_{12} tiende a t_{12} con la condición de que $d_{12} > t_{12}$. Cuando $\Delta'_{12} < 0$, entonces $\bar{X}_1 > \bar{X}_2$. Si intercambiamos los dos grupos se intercambian las medias y así la seudodiferencia media de Gini puede tomarse positiva.

Suponiendo que $D_{12} \geq 0$, nuestra distancia sirve para descomponer $G_{gb} = G_{nb} + G_t$, definiendo $C_{nb} = C_{gb} D_{12}$, que es igual a (24) y $C_t = C_{gb}\left[1 - D_{12}\right]$, que es igual a (25).

Veamos un ejemplo.

A partir de una muestra aleatoria de 20976 declaraciones del impuesto de la renta de las personas físicas (IRPF) de la provincia de Granada del año 2006, seleccionamos la renta antes de impuesto y el gravamen o impuesto, este último está ordenado según la renta antes del impuesto.

Hemos divido la muestra en dos grupos con igual tamaño de 10488 declaraciones. El primer grupo contiene las declaraciones con rentas por debajo de la renta mediana, igual a 8.628,5 euros, y el segundo grupo contiene las declaraciones con rentas superiores a la renta mediana.

Recogemos los datos siguientes:

Media Gr.1	22,8899
Media Gr.2	9812,1
Media total	4917,49495
p1	0,5
p2	0,5
s1	0,00232739
s2	0,99767261
C	0,847813
C1	0,575209
C2	0,700574

Cw	0,35014
Cgb	0,497672

En primer lugar, observamos que el grupo Gr.2 tiene un índice de concentración del gravamen (C2) superior al del grupo Gr.1. El valor medio de estos índices es C_w=0,35014. En cuanto a la componente **Entre**, C_{gb} = 0,497672, que representa el 58,7%, frente al valor de **Dentro**, que representa un 41,3%, significa que el valor del índice de concentración el impuesto se debe más a la diferencia entre grupos que **dentr**o de los grupos.

La descomposición de $G_{gb} = G_{nb} + G_t$ es igual a $C_{nb} = 0{,}4835015$ y $C_t = 0{,}0141711$. La intensidad promedio de la transvariación, t_{12}, es de 278,745 euros, que representa el 2,85% del total de diferencia entre un valor del grupo 2 y un valor del grupo 1 dividido por el total de pares de valores (10.488^2). La intensidad promedio de las diferencias compatibles con la diferencia de medias $\bar{X}_2 - \bar{X}_1 > 0$, d_{12}, es 10.067,955 euros, y representa el 97,15%.

Otra **opción** es descomponer $\Delta'_{12} = d_{12} - t_{12}$, siendo $C_{gb} = C^*_{nb} - C_t$, donde

$$C^*_{nb} = \frac{(p_1 s_2 + p_2 s_1)}{(\bar{X}_1 + \bar{X}_2)}[d_{12}] = \frac{n_1 n_2}{n^2 \bar{X}}\left[\frac{670}{25}\right] = \frac{n_1 n_2}{n^2 \bar{X}} d_{12},$$

y

$$C_t = \frac{(p_1 s_2 + p_2 s_1)}{(\bar{X}_1 + \bar{X}_2)}[t_{12}] = \frac{n_1 n_2}{n^2 \bar{X}}\left[\frac{5}{25}\right] = \frac{n_1 n_2}{n^2 \bar{X}} t_{12}.$$

siendo $C^*_{nb} = p_1 - s_1 + C_t$ y $C_{nb} + C^*_{nb} = 2(p_1 - s_1)$, ya que $C_{nb} = p_1 - s_1 - C_t$.

Por último, $C_{nb} = C^*_{nb} - 2C_t$, luego $C_t = \dfrac{(C^*_{nb} - C_{nb})}{2}$.

Así, podemos descomponer un índice de concentración en dos grupos con reordenación:

$$C = C_w + C^*_{nb} - C_t. \tag{28}$$

En el ejemplo con dos grupos de igual tamaño (igual a 5) y con reordenación, obtenemos lo siguiente: $C^*_{nb} = 0{,}254752852$, $C_t = 0{,}00190114$, $C_{gb} = 0{,}25285171$, $C_w = 0{,}08745$ y $C = 0{,}340304183$. Vemos que C^*_{nb} es un poco superior al C_{nb} de la primera opción.

9 UNA GENERALIZACIÓN A *k* GRUPOS

Siguiendo a Dagum (1997), la fórmula de la descomposición de un índice de concentración en *k* grupos es:

$$C = C_w + \sum_{j=2}^{k}\sum_{h=1}^{j-1} \frac{\Delta'_{jh}}{\left(\bar{X}_j + \bar{X}_h\right)}\left(p_j s_h + p_h s_j\right).$$

Al ser $\left(p_j s_h + p_h s_j\right) = \dfrac{n_j n_h\left(\bar{X}_j + \bar{X}_h\right)}{n^2 \bar{X}}$, la descomposición es igual a

$$C = C_w + \sum_{j=2}^{k}\sum_{h=1}^{j-1} \frac{n_j n_h}{n^2 \bar{X}} \Delta'_{jh} \ .$$

Si tomamos la opción primera, es decir que $\Delta'_{jh} = d_{jh} - 2t_{jh} + t_{jh}$, resulta la siguiente descomposición:

$$C = C_w + \sum_{j=2}^{k}\sum_{h=1}^{j-1} \frac{n_j n_h}{n^2 \bar{X}}\left(d_{jh} - 2t_{jh}\right) + \sum_{j=2}^{k}\sum_{h=1}^{j-1} \frac{n_j n_h}{n^2 \bar{X}} t_{jh}.$$

siendo $C_{nb} = \sum_{j=2}^{k}\sum_{h=1}^{j-1} C_{nb}^{jh}$, $C_t = \sum_{j=2}^{k}\sum_{h=1}^{j-1} C_t^{jh}$, $C_{gb} = \sum_{j=2}^{k}\sum_{h=1}^{j-1} C_{gb}^{jh}$ y $C_{gb}^{jh} = C_{nb}^{jh} + C_t^{jh}$ donde $C_{nb}^{jh} = \dfrac{n_j n_h}{n^2 \bar{X}}\left[d_{jh} - 2t_{jh}\right]$, $C_t^{jh} = \dfrac{n_j n_h}{n^2 \bar{X}}\left[t_{jh}\right]$ y $C_{gb}^{jh} = \dfrac{n_j n_h}{n^2 \bar{X}}\left[d_{jh} - t_{jh}\right]$.

En el caso de un índice de Gini, debemos reemplazar $d_{jh} - 2t_{jh}$ por $d_{jh} - t_{jh}$, t_{jh} por $2t_{jh}$, y $d_{jh} - t_{jh}$ por $d_{jh} + t_{jh}$.

BIBLIOGRAFÍA

DAGUM, C. (1997). A new approach to the decomposition of the Gini Income Inequality ratio. *Empirical Economics*, vol. 22, 551-531.

COSTA, M. (2009). Transvariation and inequality between subpopulations in the Dagum's Gini index decomposition. *Metron-International Journal of Statistics*, vol. LXVII, n. 3, 229-241.

COSTA, M. (2015). Gini index decomposition for the case of two subgroups. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*. 631-644.

GINI, C. (1916). Il concetto di transvariazione e le sue prime applicazioni. Reproduced by Corrado Gini Memorie di metodologia statistica. Volume secondo: Transvarazione, 1-55, Università degli Studi di Roma. (in Italian).

KAKWANI, N. (1977). Measurement of tax progressivity: an international comparison. *The Economic Journal*, vol. 87, n. 345, 71-80.

KAKWANI, N. (1980). *Income inequality and poverty. Methods of estimation and policy application.* Report 10092. A World Bank Research Publication. Oxford University Press.

KAKWANI, N. (1984). On the measurement of tax progressivity and redistributive effect of tax with applications to horizontal and vertical equity. *Advances in Econometrics*, vol. 3. 149-168.

MEHRAN, F. (1975), *A Statistical analysis of income inequality based on a decomposition of the Gini index*. 40th Session, Varsaw, International Statistical Institute, y fue publicado en su Bulletin.

MONTI, M. (2007). *Note on the Dagum decomposition of the Gini inequality index*. Working Paper n. 2007-16. Università degli Studi di Milano.

MONTI, M y SANTORO, A. (2009). *The Gini decomposition: an alternative formulation with an application to tax reform*. Working Paper n. 2009-30.

REYNOLDS, M. and SMOLENSKY, E. (1977). *Public Expenditures, Tax, and the Distribution of income: The United States, 1950,1961, 1970*. New York: Academic Press.

VERNIZZI, A. (2009). *Playing with the Hadamard product in decomposing Gini, concentration, redistribution and re-ranking indexes*. Working Paper, n. 2009-50, Università degli Studi di Milano.

CAPÍTULO 20

APUNTES POÉTICO-DIDÁCTICOS SOBRE LA HISTORIA DE LA ESTADÍSTICA Y LAS PROBABILIDADES

JAVIER PERALTA
Universidad Autónoma de Madrid

1. INTRODUCCIÓN

La diferencia de intereses y objetivos, los distintos recursos y técnicas de las matemáticas y la poesía, hacen poco frecuente que ambas materias se presenten unidas. No obstante, en una reflexión más meditada cabe hallar distintos vínculos entre las dos, tales como la economía de palabras del lenguaje matemático y que también, frecuentemente, acompaña a un buen poema; la presencia matemática en la estructura formal de la poesía, como indicaba Menéndez Pelayo en su *Historia de las ideas estéticas en España* (Rodríguez, 2014); el mutuo interés por analizar el infinito; la belleza[1]; etc.

Por otra parte, es posible encontrar matemáticos que estén enamorados de la poesía, aunque consideran esta actividad como una afición personal, desligada de su profesión. E igualmente existen poetas que aman las matemáticas, y que han querido expresar ideas matemáticas en sus versos. Algunos de ellos, en uno y otro caso, serán mencionados en las siguientes páginas.

Hay, por tanto, poesía matemática, si bien, dirigida casi siempre a conceptos aislados, no a temas o teorías generales. Y de ella, una parte corresponde a lo que podríamos denominar poesía matemática didáctica; esto es, la que va dedicada a la

[1] Como afirmaba Bertrand Russell (1976, p. 75): *"...las matemáticas no solo poseen verdad, sino suprema belleza, una belleza fría y austera"*.

enseñanza. Sin embargo, esa poesía didáctica suele ubicarse en los tramos de la educación infantil o primaria, pero es prácticamente inexistente la orientada a la enseñanza secundaria o universitaria.

En estadística y cálculo de probabilidades, como en las demás ramas de las matemáticas, se adolece, del mismo modo, de una poesía didáctica correspondiente. Y esto es así para cada uno de sus posibles enfoques: conceptos, teorías, teoremas, aplicaciones, historia…

El objetivo del presente trabajo es subsanar en parte, de alguna manera, esa carencia. Concretamente, facilitar a profesores y estudiantes un resumen de algunos de los hitos más importantes de la historia de la estadística y probabilidad, mediante una presentación poético-didáctica en sonetos; para lo cual, nos vamos a permitir utilizar, incluso, un lenguaje poco académico, más cercano a los alumnos. El relato generalmente irá acompañado, además, de un panorama global del desarrollo de las matemáticas en la época correspondiente y, en ocasiones, estará salpicado de aspectos cruciales de la historia de la civilización, para situar aquella evolución en su contexto.

2. MATEMÁTICOS POETAS Y POETAS AUTORES DE VERSOS MATEMÁTICOS

Aunque matemáticos y poetas se encuentren frecuentemente muy alejados o, incluso, tal como se ha dicho antes, se ignoren directamente, han existido distintos matemáticos que han escrito poesía.

Centrándonos en el caso de España y, como botón de muestra, podríamos citar a Diego de Torres Villarroel (1684-1770), catedrático de Matemáticas de la Universidad de Salamanca, que predijo la fecha de la Revolución Francesa en estos versos (Martínez, 1998, p. 101):

“Cuando los mil contarás
y los trescientos doblados,
y cincuenta duplicados,
con los nueve dieces más,
entonces tú lo verás,
mísera Francia postrera
con tu Rey y tu Delfín
y tendrá entonces su fin
tu mayor gloria primera.”

$$(1000 + 2 \cdot 300 + 2 \cdot 50 + 9 \cdot 10 = 1790)$$

También Pedro Puig Adam (1900-1960), posiblemente el didacta de las matemáticas español más ilustre a lo largo de la historia, escribió el siguiente soneto con motivo del fallecimiento de José María Plans, uno de sus maestros y director de su tesis doctoral (Peralta, 2000, pp. 50-51):

"Inmóvil, sin ruido, mansamente,
como una tenue luz que se apagara
borrosa la sonrisa de su cara
cerró los ojos y abatió la frente.

Así se fue, tan dulce y suavemente,
que más que anochecer amaneciera,
como tras dura y fatigosa espera
a través de este mundo y de esta gente.

Su llama de bondad dejó encendida,
semilla de saber dejó sembrada.
Si corta fue su vida,

no por ello su ejemplo quedó en nada.
La lección que nos dio no está acabada.
¡Y el corazón no olvida!"

Recíprocamente, también han existido poetas que se han interesado por las matemáticas, y que incluso han expresado distintas ideas matemáticas en algunos de sus versos. Entre ellos se encuentran Leopoldo Castilla y el *Teorema del solitario*, Pablo Neruda y su *Oda a los números*…; pero acaso el más conocido sea Rafael Alberti y su soneto *A la divina proporción* (Peralta, 2001, pp. 17-18):

"A ti, maravillosa disciplina,
media, extrema razón de la hermosura,
que claramente acata la clausura
viva en la malla de tu ley divina.

A ti, cárcel feliz de la retina,
áurea sección, celeste cuadratura,
misteriosa fontana de mesura
que el universo armónico origina.

A ti, mar de los sueños angulares,
flor de las cinco formas regulares,
dodecaedro azul, arco sonoro.

Luces por alas un compás ardiente.
Tu canto es una esfera transparente.
A ti, divina proporción de oro.

En fin, en (Núñez y Paralera, 2012), entre otros trabajos, pueden encontrarse más ejemplos de ambos casos.

3. POESÍA MATEMÁTICA DIDÁCTICA

Según indica José María Núñez Espallargas en *La Ciencia en la Poesía*, desde finales del siglo XIX la ciencia ha sido a veces objeto de la poesía, debido fundamentalmente a la influencia francesa y a la creencia de que la rima ayuda a la memorización de los conceptos (Núñez, 2008). Aunque esta poesía matemática didáctica es más frecuente en los tramos de educación infantil y primaria, de lo que hay abundantes muestras en la grafía de los números, tablas de sumar y de multiplicar…, y, especialmente, en la obra de Gloria Fuertes (1917-1998).

No obstante, las escasas muestras que existen sobre poesía matemática se refieren tan solo a casos aislados; esto es, abordan un tema o un aspecto muy concreto del panorama matemático. Ejemplos bien conocidos son el *Teorema de Thales*, de Les Luthiers, en versión musical; y otro escrito con anterioridad al siglo XIX: el texto de la comunicación (en italiano) de Tartaglia (1499-1557) a Cardano de la solución de la ecuación cúbica en tercetos (Martín, 2000, p. 115). También, aunque mucho menos famoso que los anteriores, es un problema sobre grifos propuesto por Tomás Vicente Tosca (1651-1723) en su *Compendio Mathematico* (Tosca, 1727, pp. 204-205).

Según creemos, tan solo parece que haya tres excepciones; es decir, trabajos en los que se presente un determinado enfoque matemático de manera global.

El primero data del siglo XIX, y se refiere a un tema colindante con las matemáticas: la astronomía. Es el libro titulado *Poema Físico-Astronómico* (1828), del marino y matemático Gabriel Císcar (1769-1829), que consiste en un tratado completo de astronomía escrito en verso, y del que hemos tomado como ejemplo el siguiente poema (Císcar, 1861, pp. 127-128):

"Cuando, del hemisferio iluminado
El Polo, se halla más aproximado
A uno ú otro trópico, es más lento
Hácia el Norte ó el Sur el movimiento,
Hasta que, al parecer, queda parado:
Y se llama solsticio aquel momento
En que al límite llega prefijado,
Pues la elipse, en el punto colocado
Del respectivo Polo más cercano,
Es perpendicular al Meridiano;
Y estos puntos se llaman solsticiales.
Mas cuando son la noche y dia iguales,
Llaman el Equinoccio comúnmente.
Y se advierte que son, muy propiamente,
De la lengua latina derivadas
Las denominaciones expresadas."

El segundo ejemplo es muy poco conocido. Se trata de la obra sinfónica, de orientación didáctica, titulada *Ensalada Matemática* (Muñoz y Peralta, 2014), estrenada en el año 2014. Su texto consta de dos partes: una introductoria, breve, expresada en décimas espinelas en las que se expone qué son (para el autor de la letra) las matemáticas: una ciencia que no solo es útil por sus aplicaciones, sino que es esencialmente creativa y una parte sustancial de la cultura. La segunda parte, escrita en romance, es una introducción elemental de la historia de las matemáticas.

La obra comienza de esta manera (*ibíd*.):

"Para poder hacer cuentas,
ver si te engaña tu caja
o si tu banco te faja
en vez de darte tus rentas,
tú con la mates intentas
resolver estas cuestiones.
Y además de estas funciones,
¿sabes que hay mates amables,
simpáticas y agradables,
todo un mundo de ficciones?"

El último caso se refiere al libro Las mates en verso (Peralta, 2015), en el que se cuenta la historia de las matemáticas en cincuenta sonetos y constituye, según el Prof. Luis Rico, autor del Prólogo, una obra poética didáctica. Desde luego, no es una historia de la estadística y del cálculo de probabilidades en particular, aunque lógicamente esté incluida en aquella.

En las siguientes páginas se realizará una selección de los poemas relativos a la historia de la estadística y la probabilidad, que casi siempre irán precedidos de otros que presenten una visión general de la historia de las matemáticas (y, en ocasiones, de la historia de la civilización) en la época correspondiente. Se comenzará con un soneto, no perteneciente al libro mencionado, que se refiere a los inicios remotos de la estadística y la probabilidad.

4. NOTAS POÉTICO-DIDÁCTICAS SOBRE LA HISTORIA DE LA ESTADÍSTICA Y LA PROBABILIDAD

Consideramos los cinco momentos históricos, a nuestro juicio, más importantes: sus antecedentes remotos, el Renacimiento, el siglo XVII, el siglo XVIII y, conjuntamente —por la razón que luego se dirá— los siglos XIX y XX.

4.1. Antecedentes remotos

La palabra estadística, como es sabido, proviene del latín "statisticus", que significa estado. Los estados fueron, efectivamente, quienes durante siglos requerían información, mediante censos, de su población: nacimientos o defunciones, bienes, producción agrícola o ganadera, efectivos militares… Uno de los más antiguos que se conoce se hicieron en la Antigua Babilonia, unos 4.500 años a. C., y otro posterior, también de importancia, fue realizado en China hacia el año 2.200 a. C. Según la religión católica, el nacimiento de Cristo, precisamente, tuvo lugar cuando se estaba efectuando el censo romano, que afectaba, asimismo, como es natural, a la ciudad de Nazareth.

En cuanto a la probabilidad, tiene su origen en los juegos de azar originados con el hueso astrágalo de cordero (taba), quizá unos 40.000 años a. C. Y existen evidencias en pinturas en las pirámides de Egipto, que muestran la existencia de juegos de azar con la taba y los dados, hacia 3.500 a. C. También parece ser que continuaron en Grecia y Roma.

En este soneto se resumen los inicios de la estadística y el cálculo de probabilidades:

De la ciencia estadística, un censo
fue su antecedente primitivo:
uno hecho en Babilonia, lo suscribo,
siglos antes de Cristo, según pienso.

En China hubo otro, muy extenso,
y el mismo nacimiento de El Mesías,
con un padrón que se hizo en esos días,
tuvo relación, un nexo inmenso.

La probabilidad, ¿no conocías
cuáles son sus primeras expresiones?:
suceden en Egipto, ¿lo sabías?

En tiempo de los viejos faraones
jugaban a la taba, con porciones
de huesos de cordero, en las vías.

4.2. El Renacimiento

En el Renacimiento tiene lugar un importante desarrollo matemático, especialmente en cuatro de sus ramas: álgebra, con la resolución de la ecuación cúbica (y cuártica) y la introducción del lenguaje algebraico; geometría, que durante más de un milenio apenas había evolucionado y entonces retoma su desarrollo de la mano de los pintores al investigar las reglas de la perspectiva (Peralta, 2008); el cálculo infinitesimal, o mejor, sus precedentes, con la aparición de los algoritmos infinitos; y el cálculo de probabilidades, propiciado por las apuestas de los juegos de azar de los nobles. Aunque lo que aquí interesa es principalmente esto último, parece conveniente comenzar describiendo cuáles son las características generales de este período histórico (Peralta, 2015, p. 75):

“Ahora comenzará una nueva era:
es el Renacimiento, que se inicia
mediado el siglo quince (¡qué estulticia!,
como si alguien aún no lo supiera!),

y en todo el dieciséis también impera.
Es la centralidad del ser humano
dentro del Universo, el ufano
pensamiento que surge y que prospera.

Impulso que en Europa no es vano,
hay una efervescencia intelectual,
florecerán las artes por igual,

inventará la imprenta un germano,
se descubrirá un mundo muy lejano
y la universidad será crucial.”

En el siguiente soneto se habla del nacimiento del concepto de función en el siglo XIV, el surgimiento de los algoritmos infinitos y, en el último terceto, del inicio de la teoría de probabilidades (*ibíd.*, p. 81):

“Se inició terminándose el Medievo,
con Oresme y sus representaciones,
el dibujo primario de funciones
en el siglo catorce, lo compruebo.

Pues dos siglos después de estas acciones
el análisis hace su presencia:
sus precursores forman con frecuencia
cálculos infinitos, sucesiones…

Algoritmos de Vieta (¡qué pasada
para calcular pi de forma dada!),
Cataldi y sus fracciones infinitas…

La probabilidad, que hoy necesitas,
en los juegos de naipes es tratada,
y así, será estudiada.”

4.3. El siglo de los genios de la matemática

El foco principal de la actividad matemática durante la Revolución Científica, que había comenzado en el siglo XVI en Italia, se desplaza hacia el norte, entre otras razones por la relativa libertad religiosa que se respiraba en esa zona. Destacan entonces figuras de la talla de Pascal, Fermat, Descartes, Newton, Leibniz…; de ahí, que el siglo XVII pueda llamarse *el siglo de los genios de la matemática*.

Finaliza el XVI y comienza el XVII con la introducción de los logaritmos, tratando de simplificar los cálculos aritméticos, y continúa con el nacimiento de la geometría analítica y el inicio de la teoría de números. También aparece la geometría proyectiva (surgida de la perspectiva de los pintores), que poco después queda arrinconada hasta que se retoman sus ideas en siglos posteriores.

Aunque la estadística y el cálculo de probabilidades habían dado sus primeros pasos con Cardano, Tartaglia y Galileo, es el XVII cuando se considera que nacen propiamente como ciencia y, asimismo, empiezan a vislumbrarse algunas de sus aplicaciones. Además, se perfecciona el concepto de función y comienzan a gestarse las ideas fundamentales del cálculo infinitesimal. En su último tercio, Newton y Leibniz realizarán las aportaciones esenciales y construirán su cuerpo de doctrina.

En el siguiente soneto se resumen el principio de la elaboración de la teoría de la estadística y la probabilidad y, de manera breve, algunas notas acerca de su desarrollo en este siglo (*ibíd.*, p. 89).

“También con la estadística, juzgad,
se logró impulsar su crecimiento,
y de igual modo en probabilidad
Galileo y Meré dieron su aliento.

Pascal y Fermat, con el complemento
de Huygens, formularon en su día
las bases principales del invento
de probabilidad: su teoría.

La probabilidad y la estadística,
con sus aplicaciones y su heurística,
se investigaron, pues, y hubo un avance.

Huygens y Halley hacen que se afiance
en la demografía su casuística,
y hasta en anualidades tuvo alcance.”

4.4. La matemática ilustrada

En el siglo XVIII, *Siglo de la Ilustración*, *Siglo de las luces* o *Siglo de la razón*, la tradición va sustituyéndose de algún modo por la razón, la crítica y la libertad religiosa.

La matemática muestra una gran fecundidad, pero no en cuanto al nacimiento de nuevas ramas, sino por el desarrollo de las ya creadas, especialmente el cálculo infinitesimal, que se integra en un campo más amplio: el análisis. Y hay un matemático que sobresale por encima de todos: Leonhard Euler (1707-1783), que hace aportaciones fundamentales a todas las ramas de las matemáticas y de la física matemática.

Así se describen en cierta manera esas ideas (*ibíd.*, p.95):

"El Siglo de las Luces, o también,
el de la Ilustración, es importante,
pues tuvo un desarrollo alucinante
el cálculo, que hubo a tutiplén.

El personaje más acadabrante
que en todos los terrenos destacara,
y sin estar majara,
es Euler, un científico impactante.

En cálculo es un nombre tan brillante
como en la geometría fue Euclides,
aunque alguien más también hizo bastante.

D'Alembert, Bernoulli y otros varios,
Stirling o Laplace, no los olvides,
ni a Legendre y Lagrange: son legendarios."

Obviamente, además del cálculo también progresaron otras áreas de las matemáticas, como la teoría de números o la geometría proyectiva y, asimismo, se inaugura una incipiente topología. La probabilidad y la estadística reciben igualmente un impulso en su desarrollo, como se recoge en el siguiente soneto (*ibíd.*, p. 99):

"En probabilidad y en estadística
Bernoulli descubrió su teorema
o llamado, siguiendo su casuística,
el de los grandes números: su emblema.

Tendremos que citar en este esquema
a De Moivre, Laplace y otros más,
y la curva normal e igual, quizás,
distribución continua, ¡vaya tema!

También mencionaremos a Tom Bayes,
ligado a su teorema (fliparás
si tratase de entrar en los detalles).

Aplicaciones en demografía;
¿por quiénes?: no es preciso que los halles,
fueron Euler, Fourier y compañía."

4.5. La matemática contemporánea

Hay ciertos rasgos que caracterizan las matemáticas del siglo XIX, algunos de los cuales persisten durante parte del XX. Por ello, haremos un examen conjunto de ambos siglos, aunque excluyendo, más o menos, la segunda mitad del XX, debido a que la matemática ya es muy compleja, y difícilmente tendría encaje en la visión didáctica de la historia que se pretende relatar en este trabajo.

A nuestro juicio, esas características comunes a ambos siglos son esencialmente cuatro. La primera es la fecundidad (la producción matemática es mucho más extensa que la desarrollada en total en los siglos anteriores). La segunda es la unidad: las diferentes ramas de las matemáticas seguían su curso de manera prácticamente independiente, y ahora se procurará formar conceptos muy generales que permitan admitir ciertas similitudes en sus estructuras (se recobra así, en cierto modo, la unidad existente en la matemática de la Antigua Grecia). Por otra parte, desde finales del XVIII habían comenzado a aparecer ciertas contradicciones en los principios de diversos conceptos y teorías, que ahora se intentarán corregir; así, el tercer rasgo es la revisión de fundamentos, acentuando la autonomía de las matemáticas del mundo exterior y de otras ciencias. Por último, se introduce la teoría de conjuntos, en cuyo lenguaje se va a tratar de expresar la gran variedad de nociones y temas matemáticos.

En los dos siguientes sonetos se expresan estas ideas y alguna otra (*ibíd.*, pp. 101 y 103):

“El siglo diecinueve en las mates
es llamado también su Edad de oro:
evolucionan, aunque hay deterioro
en fundamentos suyos (ven dislates).

Vamos a analizar conjuntamente,
ya que coinciden rasgos y debates,
el siglo diecinueve junto al veinte.
Pues allá van: espero te percates.

Lo primero, diré, fecundidad,
pues ahora nuestra ciencia, ciertamente,
se extiende mucho más en cantidad.

El segundo atributo es la unidad;
y para que las mates sean compactas,
se crearán nociones muy abstractas.”

“Rasgo tercero: nueva coincidencia
será la revisión de fundamentos;
pondrá en evidencia sus acentos,
su independencia, pues, de otra ciencia.
Y el cuarto y último de sus aspectos

será la introducción de los conjuntos:
toda la matemática, y asuntos
suyos, se basará en sus elementos.
Pero antes que estudiemos cada rama
en los sonetos próximos adjuntos,
digamos algo más del panorama:

la mitad inicial del diecinueve
es regida por Gauss, el de más fama,
y Cauchy, que también es de relieve.”

Se desarrollan entonces de manera espectacular las distintas ramas: teoría de números, análisis matemático, álgebra…; y nacen otras nuevas. En particular, Laplace (1749-1827), a caballo entre los siglos XVIII y XIX, confiere un enfoque auténticamente matemático al cálculo de probabilidades y, en compañía de Poisson, Gauss, etc., lo desarrollan y lo aplican a otros campos. En la segunda mitad del XIX, será la Escuela de San Petersburgo, con Chebyshev y sus discípulos, quien tendrá el protagonismo. A finales del XIX, a partir de la axiomática de Kolmogorov, la estadística vuelve a extenderse por todo el mundo y se da el paso de la estadística deductiva a la inductiva. Etc.

A continuación se hace un resumen en verso de la evolución de la estadística y las probabilidades (*ibíd.*, p. 111):

“En probabilidad y estadística
citemos a Laplace, a quien se debe
la definición más característica
de probabilidad, muy clara y breve.

La campana de Gauss y experimento
de Galton, dos ejemplos de relieve.
Digamos que también va el movimiento
a Rusia, a mitad del diecinueve.

Algunos personajes de talento:
Kolmogorov, Chebyschev y otros son
Markov, Lyapunov, Fisher y Poisson.

La estadística es inferencial
y sus aplicaciones son legión:
Galton, Pearson, Student… (un raudal).”

5. EPÍLOGO

En las páginas precedentes se ha tratado de elaborar una aproximación elemental, versificada, de la historia de la estadística y de la probabilidad, con un objetivo didáctico: dirigido fundamentalmente a alumnos de enseñanza secundaria obligatoria, bachillerato y, quizá, primer curso universitario. En todo caso, serán los profesores correspondientes quienes habrán de considerar si este material puede ser adecuado para ello y, en caso afirmativo, cuál habría de ser la metodología apropiada para su puesta en práctica.

Por otra parte, quisiéramos dejar constancia de nuestras dudas acerca de si estas notas elementales tienen el nivel académico exigido para formar parte de los trabajos del VIII Congreso Internacional de Historia de la Estadística y la Probabilidad. Si no fuera así, rogamos se disculpe a quien, considerando como Weierstrass, que *"ningún matemático puede serlo del todo si no tiene también algo de poeta"* (González, 2012, p. 13), tan solo ha pretendido mostrar una cara más amable de la historia de la estadística y la probabilidad y de la que es *reina y a su vez criada de las ciencias*.

BIBLIOGRAFÍA

CÍSCAR, G. (1861). *Poema Físico-Astronómico*. Madrid: Imprenta y Estereotipia Rivadeneira.

GONZÁLEZ, F. (2012). *Esperando a Gödel. Literatura y Matemáticas*. Madrid: Nivola.

MARTÍN, F. (2000). *Cardano y Tartaglia. Las matemáticas en el Renacimiento italiano*. Madrid: Nivola.

MARTÍNEZ, E. (1998). Pronósticos y predicciones de Diego de Torres Villarroel. En M. M. Pérez y E. Martínez (Eds.). *Revisión de Torres Villarroel* (pp. 93-102). Salamanca: Universidad de Salamanca.

MUÑOZ. E. y PERALTA, J. (2014). *Ensalada matemática*. Obra sinfónica estrenada el 14/03/2014. Registrada en la SGAE, no editada.

NÚÑEZ, J. y PARALERA, C. (2012). Los Números en la Poesía. *Números*, 79, 81-100.

NÚÑEZ, J. M. (2008). *La Ciencia en la Poesía. Antología de la poesía española del siglo XIX*. Madrid: Nivola.

PERALTA, J. (2000). Sobre los maestros de Pedro Puig Adam. *Boletín de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas*, 56, 41-54.

PERALTA, J. (2001). Sobre las buenas relaciones entre matemáticas y literatura. *Encuentros multidisciplinares*, III, 8, 13-18.

PERALTA, J. (2008). Las matemáticas y las artes liberales. En *Dibujo Técnico y Matemáticas: una Consideración Interdisciplinar* (pp. 91-118). Madrid: Secretaría General Técnica, Ministerio de Educación y Ciencia, Instituto Superior de Formación del Profesorado.

PERALTA, J. (2015). *Las mates en verso. La historia de las matemáticas contada en 50 sonetos*. Madrid: Nivola.

RODRÍGUEZ, M. J. (2014). *Menéndez Pelayo y la Literatura: estudios y antología*. Madrid: Verbam.

RUSSELL, B. (1967). *Misticismo y lógica*. Buenos Aires: Paidós.

TOSCA, T. V. (1727). *Compendio Mathematico*. Tomo I. Madrid: Imprenta de Antonio Martín.