CAPÍTULO 8

SOBRE EL CRITERIO FUNCIONAL DE DESIGUALDAD DE PARETO

JESÚS BASULTO SANTOS
JOSÉ ANTONIO CAMÚÑEZ RUIZ
Universidad de Sevilla

Introducción

Cuando Pareto propuso su criterio de desigualdad en su *Cours D'Economie Politique*, tomo II, página 30, pronto surgieron, entre sus coetáneos, muchas dudas sobre el significado del concepto de desigualdad que Pareto usaba en su criterio funcional. Muchos estadísticos y economista, la mayor parte italianos, no encontraban en su criterio una relación con las medidas estadísticas de dispersión conocidas.

Por otra parte, Pareto introdujo lo que hoy denominamos "mejora de Pareto" y "mejora óptimo de Pareto" para comparar, por ejemplo, dos vectores de $\mathbb{R}^n$. Nos preguntamos qué relación puede existir entre su criterio funcional de desigualdad con estos últimos criterios de Pareo de optimación.

Así, a partir de comparaciones de vectores de rentas con n componentes o individuos, recogemos los criterios de "mejora de Pareto", "mejora óptimo de Pareto" y "mejora por rangos de Pareto". Viendo que el criterio "mejora por rangos de Pareto" está relacionado con las funciones: cuantil discreta, cuantil continua y la función de distribución acumulada.

Recogemos el criterio de desigualdad de Pareto, que se expresa a partir de la función de supervivencia y, también, de la función de distribución acumulada, lo que permite relacionar el criterio de desigualdad de Pareto con la "mejora por rangos de Pareto".

El trabajo estudia varias consecuencias del criterio de desigualdad de Pareto y su relación con otros criterios funcionales de desigualdad.

Mejora de Pareto. Mejora óptima de Pareto. Comparación de vectores de rentas con igual número de componentes

Definición 1. De dos vectores de rentas

$$\vec{x} = (x(1), x(2), ..., x(n)) \quad \text{e} \quad \vec{y} = (y(1), y(2), ..., y(n)),$$

diremos que $\vec{y}$ es una *mejora de Pareto de* $\vec{x}$ siempre y cuando ocurra

$$y(k) \geq x(k), \quad k = 1, 2, ..., n.$$

Cuando en un individuo la desigualdad es una igualdad diremos entonces *que no está en peor situación*, mientras que cuando la desigualdad es estricta diremos que *se encuentra en mejor situación*.

Definición 2. Diremos que $\vec{y}$ es *una mejora óptima de Pareto de* $\vec{x}$ siempre que $\vec{y}$ sea *una mejora de Pareto de* $\vec{x}$ que no exista otro vector de rentas $\vec{z}$ que sea una *mejora de Pareto de* $\vec{y}$.

Ejemplo 1. Ventas de coches de segunda mano. El vendedor valora el coche en 10.000 euros y el comprador valora el coche en 15.0000 euros.

Si la venta se acuerda en 12.000 euros, entonces el vector $\vec{y} = (12.000, -12.000)$ es una mejora óptima de Pareto del vector $\vec{x} = (10.000, -15.000)$ (la primera componente es al valor del vendedor y la segunda del comprador) ya $y(k) \geq x(k)$, para k = 1,2, y, además no existe otro vector $\vec{u} = (b, -b)$, distinto de $\vec{y}$, que sea una mejora de Pareto de $\vec{y}$ .En general, todos los vectores del tipo: $\vec{y} = (a, -a)$, con $10.000 \leq a \leq 15.000$ son mejora óptimos de Pareto.

Ejemplo 2. En el *Manuel D'Économie Politique* (1909), pp. 389 y 390, encontramos el siguiente ejemplo de Pareto, donde el vector de rentas inicial es:

$$\vec{x} = (1.000, 1.000, 1.000, 1.000, 1.000, 1.000, 1.000, 1.000, 1.000, 10.000).$$

Es decir hay 9 individuos "pobres" con 1.000 francos y uno "rico" con 10.000 francos.

Si la renta aumenta en 72.000 francos, un posible reparto es

$$\vec{y} = (1.000, 10.000, 10.000, 10.000, 10.000, 10.000, 10.000, 10.000, 10.000, 10.000).$$

Es decir, ahora hay "un pobre" con 1.000 francos y 9 "ricos" con 10.000 francos. Es claro que $\vec{y}$ es *una mejora óptima de Pareto de* $\vec{x}$.

Otra mejora óptima de Pareto sería dar los 72.000 francos al "rico".

Cualquier reparto que "no disminuya la renta de algunos individuos" y aumente la renta al resto de los otros sería una mejora óptima de Pareto.

Mejora por Rangos de Pareto. Comparación de vectores de rentas con igual número de componentes

Si los vectores de renta $\vec{x}$ e $\vec{y}$ los convertimos en vectores cuyas componentes están ordenadas de menor a mayor, es decir

$$\tilde{\vec{x}} = (x_1, x_2, ...x_n), \quad \text{donde } x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n.$$

Y también

$$\tilde{\vec{y}} = (y_1, y_2, ...y_n), \quad \text{donde } y_1 \leq y_2 \leq ... \leq y_n.$$

Definición 3. Diremos que $\vec{y}$ es una *mejora por rangos de Pareto de* $\vec{x}$ siempre y cuando ocurra

$$y_i \geq x_i, \quad i = 1,2,\ldots, n.$$

donde supondremos que alguna de estas desigualdades es estricta para evitar la igualdad de los vectores.

Lema I: Si $\vec{y}$ *es una mejora de Pareto de* $\vec{x}$**,** entonces $\vec{y}$ *es una mejora por rangos de Pareto de* $\vec{x}$**.**

Una mejora por rangos de Pareto no implica una mejora de Pareto.

Ejemplo 3

$$\vec{x} = (1,4) \quad \text{e} \quad \vec{y} = (4,2).$$

Los vectores ordenados son:

$$\tilde{\vec{x}} = (1,4) \quad \text{e} \quad \tilde{\vec{y}} = (2,4).$$

Ahora vemos que $\vec{y}$ *es una mejora por rangos de Pareto de* $\vec{x}$, pero $\vec{y}$ *no es una mejora de Pareto de* $\vec{x}$**.**

Nota 1. Mientras que comparar vectores de rentas siempre conduce a comparar individuos, comparar vectores ordenados conduce, muchas veces, a comparar distintos individuos. Así, en el ejemplo 3, $x(1) = 1$ se compara con $y(1) = 4$, datos no ordenados, pero con datos ordenados vemos, en este ejemplo, que $x_1 = 1$, individuo uno, se compara con $y_1 = 2$, individuo dos. Esto último se debe a que la ordenación "elimina" los identificadores de los individuos, luego cualquier permutación de los individuos que forman parte de estos vectores $\vec{y}$ y $\vec{x}$ conduce siempre a la misma comparación de los correspondientes vectores ordenados.

Sobre la demostración de este Lema I. Veamos que si $y(k) \geq x(k)$, $k = 1,2,...,n$, entonces $y_i \geq x_i$, $i = 1,2,...,n$.

(1) $\text{mínimo}_k \left[y(k) \right] \geq \text{mínimo}_k \left[x(k) \right]$.

Si $\text{mínimo}_k \left[y(k) \right] = y_1 < \text{mínimo}_k \left[x(k) \right] = x_1$, entonces existe un identificador *k*, tal que $y_1 = Y(k) \geq X(k)$, luego $x_1 > X(k)$ que contradice que x_1 sea el mínimo.

(2) Si $y_1 = Y\left({}^1k\right)$ y $x_1 = X\left(k^1\right)$, donde ${}^1k$ y k^1 son identificadores de las rentas y_1 y x_1, veamos que $y_2 = \text{mínimo}_{k \neq {}^1k} \left[y(k) \right] \geq \text{mínimo}_{k \neq k^1} \left[x(k) \right] = x_2$.

Si ${}^1k = k^1$, entonces estamos eliminando al identificador ${}^1k = k^1$ en el cálculo de los dos mínimos. Si aplicamos el razonamiento de (1) se obtiene el resultado.

Si ${}^1k \neq k^1$, sabemos que las comparaciones de los identificadores $k \notin \left\{ {}^1k, k^1 \right\}$ conducen a que $y(k) \geq x(k)$. Al valor $x_1 = X\left(k^1\right)$, que está fuera del cálculo del mínimo, le corresponde el valor $Y\left(k^1\right)$, tal que $Y\left(k^1\right) \geq Y\left({}^1k\right) = y_1$, y por hipótesis $Y\left({}^1k\right) \geq X\left({}^1k\right)$, luego $Y\left(k^1\right) \geq X\left({}^1k\right)$. En consecuencia $y_2 \geq x_2$.

(3) Si $y_2 = Y\left({}^2k\right)$ y $x_2 = X\left(k^2\right)$, donde ${}^2k$ y k^2 son identificadores de las rentas y_2 y x_2 , entonces $y_3 = \text{mínimo}_{k \notin \left\{ {}^1k, {}^2k \right\}} \left[y(k) \right] \geq \text{mínimo}_{k \in \left\{ k^1, k^2 \right\}} \left[x(k) \right] = x_3$, al aplicar (2).

Nota 2. Un añadido de esta demostración es la existencia de un algoritmo que nos permite comparar dos pares de vectores de rentas con individuos identificados, de tal manera que si la hipótesis de Lema I es cierta entonces el vector de rentas $\vec{y}$ ***será una mejora por rangos*** del vector de rentas $\vec{x}$ **.** También, en el caso de que estos vectores de rentas no sean comparables según “una mejora de Pareto”, pero si sean comparables según “una mejora por rangos de Pareto”, el algoritmo obtendrá dicho resultado. Por último, si los vectores no son “una mejora de Pareto” ni “una mejora por rangos de Pareto”, el algoritmo nos dirá que nos es posible la comparación según “una mejora por rangos de Pareto”.

Veamos a continuación una equivalencia entre “la mejora por rangos de Pareto” con las correspondientes funciones cuantiles de los vectores de rentas $\vec{y}$ y $\vec{x}$.

Función cuantil discreta

Sea $\vec{\tilde{x}} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ un vector ordenado de rentas. A la función que relaciona cada proporción $\frac{i}{n}$ con el valor x_i para $i = 1, 2, ..., n$, la llamaremos función cuantil discreta asociada al vector $\vec{\tilde{x}}$. Esta función la representaremos por $Q_{\vec{\tilde{x}}}\left(u_i\right) = x_i$, donde $\left\{ u_i = \frac{i}{n}; i = 1, 2, ..., n \right\}$.

Lema II. Que $\vec{y}$ *sea una mejora por rangos de Pareto de* $\vec{x}$ es equivalente a que $Q_{\vec{y}}(u_i) \geq Q_{\vec{x}}(u_i)$ para $i = 1, 2, ..., n$.

Veamos ahora como la función cuantil discreta puede extenderse a todos los valores del intervalo $[0,1]$. Veamos su definición.

Definición de función cuantil en el intervalo $[0,1]$

Sea $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ un vector ordenado de rentas. A la función definida según,

$$Q_{\vec{x}}(u) = \begin{cases} x_1 & \text{si} \quad 0 \leq u \leq \dfrac{1}{n} \\ x_i & \text{si} \quad \dfrac{i-1}{n} < u \leq \dfrac{i}{n}, \; 1 < i < n \\ x_n & \text{si} \quad \dfrac{n-1}{n} < u \leq 1 \end{cases} \tag{1}$$

diremos que es una extensión de la función cuantil discreta al intervalo $[0,1]$.

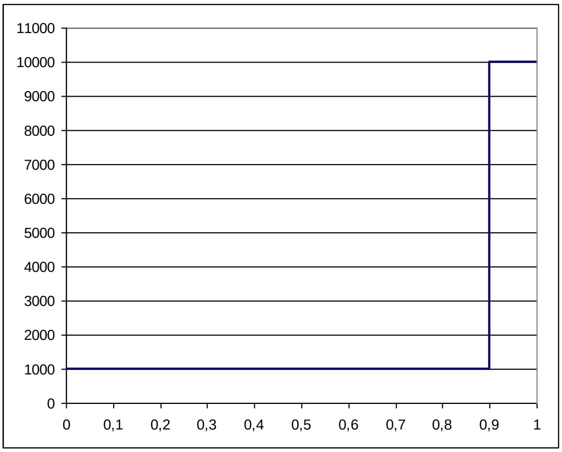
Lema III. Que $\vec{y}$ *sea una mejora por rangos de Pareto de* $\vec{x}$ es equivalente a que $Q_{\vec{y}}(u) \geq Q_{\vec{x}}(u)$ para $0 \leq u \leq 1$.

Ejemplo 2. Para el ejemplo de Pareto, la función cuantil extendida al intervalo $[0,1]$ es:

- Para el vector

$$\vec{x} = (1.000, 1.000, 1.000, 1.000, 1.000, 1.000, 1.000, 1.000, 1.000, 10.000),$$

es

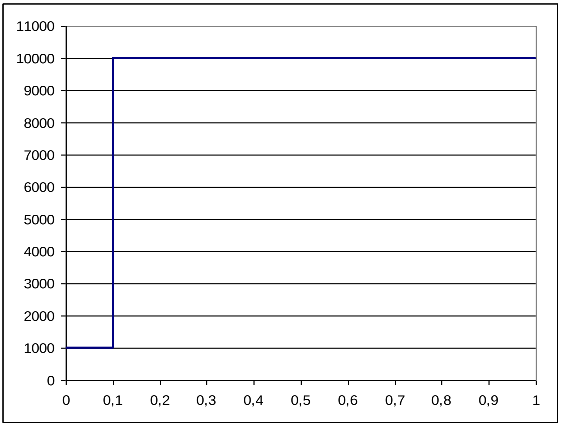


donde debe interpretarse que dicha función es continua por la izquierda para todo $0 \leq u \leq 1$, siendo entonces $Q_{\tilde{\vec{x}}}(0{,}9) = 1000$.

- Para el vector

$\tilde{\vec{y}} = (1.000, 10.000, 10.000, 10.000, 10.000, 10.000, 10.000, 10.000, 10.000, 10.000)$,

es



donde $Q_{\tilde{\vec{y}}}(0{,}1) = 1000$.

De la comparación de estas funciones cuantiles resulta que $Q_{\tilde{\vec{y}}}(u) \geq Q_{\tilde{\vec{x}}}(u)$ para $0 \leq u \leq 1$.

Veamos que la función cuantil extendida sobre $[0,1]$ está relacionada con la función de distribución asociada a las rentas $\vec{x} = \left(x(1), x(2), ..., x(n)\right)$.

Función de distribución del vector $\vec{x} = \left(x(1), x(2), ..., x(n)\right)$

Para el vector de rentas $\vec{x} = \left(x(1), x(2), ..., x(n)\right)$, la función de distribución asociada, que llamaremos $F_n(x)$, es definida por,

$$F_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{I\left(x(i) \leq x\right)}{n},$$

donde x es un número real no negativo. La expresión $I\left(x(i) \leq x\right)$ vale la unidad cuando $x(i) \leq x$, y vale cero en otro caso. La función $F_n(x)$ es no decreciente y continua por la derecha. Esta función se puede construir a partir del vector ordenado $\tilde{\vec{x}} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, es decir es independiente de los identificadores individuos.

Ejemplo 2. Para el ejemplo de Pareto, la función de distribución del vector $\vec{x}$ es

$$F_{\vec{x}}(z)=\begin{cases}0 & 0\le z<1.000\\ \frac{9}{10} & 1.000\le z<10.000\\ 1 & z\ge 10.000\end{cases},$$

y la del vector $\vec{y}$

$$F_{\vec{y}}(z)=\begin{cases}0 & 0\le z<1.000\\ \frac{1}{10} & 1.000\le z<10.000\\ 1 & z\ge 10.000\end{cases}.$$

De estas definiciones vemos que $F_y(z)\le F_x(z)$ para todo z no negativo. La desigualdad es estricta en el intervalo $[1.000, 10.000)$.

Una definición de la función de distribución por medio de la función cuantil es:

$$F_{\vec{x}}(x)=\text{Máximo}\left\{u \middle| Q_{\vec{x}}(u)\le x\right\}.$$

Definición de la función cuantil a partir de la función de distribución

La función cuantil $Q_{\vec{x}}(u)$ es igual a,

$$Q_{\vec{x}}(u)=\text{mínimo}\left\{x_i \middle| F_{\vec{x}}(x_i)\ge u\right\}, \tag{2}$$

para todo los valores x_i ordenados de menor a mayor. Si aplicamos (2) para los valores $\left\{u_i=\frac{i}{n} \middle| i=1,2,\ldots,n\right\}$, es fácil ver que $Q_{\vec{x}}(u_i)=x_i$ para $i=1,2,\ldots,n.$ Esta última definición de la función cuantil coincide con la definición (1) de función cuantil.

Lema IV. La condición de que $Q_{\vec{y}}(u)\ge Q_{\vec{x}}(u)$ para $0<u<1$ es equivalente a que $F_{\vec{y}}(z)\le F_{\vec{x}}(z)$ para todo z no negativo.

Lema V. Que $\vec{y}$ *sea una mejora por rangos de Pareto de* $\vec{x}$ es equivalente a que $F_{\vec{y}}(z)\le F_{\vec{x}}(z)$ para todo z no negativo.

DEMOSTRACIÓN. Si suponemos que $F_{\vec{y}}(z) \le F_{\vec{x}}(z)$ para todo z no negativo, entonces si $F_{\vec{y}}(z) \ge u$, donde $0 \le u \le 1$, resulta que $F_{\vec{x}}(z) \ge F_{\vec{y}}(z) \ge u$, luego el conjunto $\{x_i | F_{\vec{y}}(x_i) \ge u\} \subset \{x_i | F_{\vec{x}}(x_i) \ge u\}$. Por otra parte cuando dos conjuntos, A y B, verifican que $A \subset B$, entonces el valor mínimo de A debe de ser menor o igual que el valor mínimo de B, luego $Q_{\vec{y}}(u) \le Q_{\vec{x}}(u)$.

Este último Lema V permite expresar una mejora de Pareto a partir de comparar funciones de distribución.

Ejemplo 2. Para el ejemplo de Pareto, hemos visto que el vector

$$\vec{y} = (1.000, 10.000, 10.000, 10.000, 10.000, 10.000, 10.000, 10.000, 10.000, 10.000)$$

es una *mejora de Pareto* para el vector

$$\vec{x} = (1.000, 1.000, 1.000, 1.000, 1.000, 1.000, 1.000, 1.000, 1.000, 10.000),$$

que es equivalente a que $F_{\vec{y}}(z) \le F_{\vec{x}}(z)$ para todo z no negativo.

Nota3. El Lema V permite comparar dos vectores con distintos número de individuos por medio de las correspondientes funciones de distribución. Estos es consecuencia de que si uno vector $\vec{x}$ de rentas con n individuos lo replicamos r veces, es decir el vector $\vec{x}_r$ con valores $x_1, x_1, \ldots r \ldots x_n; x_2, x_2, \ldots r \ldots x_2; \ldots; x_n, x_n, \ldots r \ldots x_n$, entones el vector $\vec{x}_r$ tiene la misma función de distribución que el vector $\vec{x}$. Este procedimiento de replicación corresponde al axioma A5 de Dasgupta, Sen y Starrett (1973).

Criterio de desigualdad de Pareto

Pareto introdujo su criterio de desigualdad de las rentas en el parágrafo 964 del tomo II de su Cours D'Économie Politique.

A pie de la página 320, Pareto llama N_x al total de individuos con rentas superiores a la renta $x > h$, donde $h > 0$ es la renta mínima. También llama N_h al total de individuos con rentas mayores o iguales que la renta mínima h. A continuación Pareto define la función siguiente:

$$u_x = \frac{N_x}{N_h}, \qquad (3)$$

que es la proporción de individuos con rentas superiores a la renta x.

A partir de aquí, Pareto definirá su *criterio de desigualdad* de las rentas diciendo que "la desigualdad disminuirá siempre y cuando la función u_x aumente para todo $x > h$".

Si interpretamos la función (3) como el complemento de la función de distribución (se trata de la función de supervivencia) correspondiente al vector de rentas $\vec{x}=\left(x(1),x(2),...,x(n)\right)$, es decir

$$u_x=\frac{N_x}{N_h}=1-F_{\vec{x}}\left(x\right), \tag{4}$$

para todo $x>h$, entonces resultan los lemas siguientes:

Lema VI. El vector de rentas $\vec{y}=\left(y(1),y(2),...,y(n)\right)$ es menos desigual según Pareto que el vector de rentas $\vec{x}=\left(x(1),x(2),...,x(n)\right)$ siempre y cuando

$$1-F_{\vec{y}}\left(z\right)\geq 1-F_{\vec{x}}\left(z\right),$$

para toda renta z no negativa, siendo al menos una desigualdad estricta para así evitar la identidad de las funciones de distribución.

Lema VII. El vector de rentas $\vec{y}=\left(y(1),y(2),...,y(n)\right)$ es menos desigual según Pareto que el vector de rentas $\vec{x}=\left(x(1),x(2),...,x(n)\right)$ siempre y cuando

$$F_{\vec{y}}\left(z\right)\leq F_{\vec{x}}\left(z\right),$$

para toda renta z no negativa, siendo al menos una desigualdad estricta.

Los **Lemas IV** y **VII** conducen al resultado siguiente:

Lema VIII. Que $\vec{y}$ *sea una mejora por rangos de Pareto de* $\vec{x}$ es equivalente a que disminuya la desigualdad en $\vec{y}$ respecto de $\vec{x}$ según el criterio de desigualdad de Pareto.

Nota 4. El Lema VIII permite relacionar el criterio de desigualdad funcional de Pareto con las comparaciones de vectores con rentas ordenadas de menor a mayor. Bortkiewicz (1931) ya presentó este criterio de desigualdad de Pareto según nuestra Lema VII. Hoy en día, el criterio de funcional de desigualdad de Pareto resulta ser el criterio funcional de *Dominancia Estocástica de orden uno.*

Algunas consecuencias del criterio de desigualdad de Pareto

1. Si el vector de rentas $\vec{y}=\left(y(1),y(2),...,y(n)\right)$ es menos desigual según Pareto que el vector de rentas $\vec{x}=\left(x(1),x(2),...,x(n)\right)$, entonces la renta media $\bar{y}$ es superior a la renta media $\bar{x}$, donde $\vec{y}\neq\vec{x}$**.** Este resultado ya fue probado por Bortkiewicz (1931) en el caso continuo usando las correspondientes funciones de distribución.

2. Si el vector de rentas $\vec{y} = \left(y(1), y(2), ..., y(n)\right)$ es menos desigual según Pareto que el vector de rentas $\vec{x} = \left(x(1), x(2), ..., x(n)\right)$, entonces $\bar{y}\left(1 - R_{\vec{y}}\right) > \bar{x}\left(1 - R_{\vec{x}}\right)$, siendo $R_{\vec{y}}$ y $R_{\vec{x}}$ las correspondientes razones de concentración de Gini sin repetición.

   Como $R_{\vec{x}} = \dfrac{\sum_{k=1}^{n}(2k-1-n)x_k}{n(n-1)\bar{x}}$, entonces $\bar{x}\left(1 - R_{\vec{x}}\right) = \dfrac{2\sum_{k=1}^{n}(n-k)x_k}{n(n-1)}$, donde $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n$, que prueba el resultado. Vemos que el criterio escalar de desigualdad-crecimiento $\bar{x}\left(1 - R_{\vec{x}}\right)$ es compatible con el criterio de desigualdad de Pareto, es decir que cuando $\vec{y}$ *sea una mejora por rangos de Pareto de* $\vec{x}$ entonces $\bar{y}\left(1 - R_{\vec{y}}\right) \geq \bar{x}\left(1 - R_{\vec{x}}\right)$. También se observa que este criterio de desigualdad escalar pesa más las pequeñas rentas que las grandes. Este criterio escalar, que fue propuesto por Amartya Sen (1976), corrige la renta media cuando aumenta la desigualdad y, así, mide el aumento de la renta media no debida al aumento de la desigualdad o concentración de la renta.

3. Si el vector de rentas $\vec{y} = \left(y(1), y(2), ..., y(n)\right)$ es menos desigual según Pareto que el vector de rentas $\vec{x} = \left(x(1), x(2), ..., x(n)\right)$, entonces $R_{\vec{y}}$ puede ser mayor, igual o menor que $R_{\vec{x}}$. En consecuencia la razón de concentración de Gini no es compatible con el criterio de desigualdad de Pareto.

   Puede probarse que $\dfrac{(n-1)}{(n+1)}R_{\vec{x}} = \dfrac{\bar{\bar{x}}}{\bar{x}} - 1$, donde $\bar{\bar{x}} = \dfrac{2\sum_{k=1}^{n} kx_k}{n(n+1)}$.

   Cuando $\dfrac{\bar{\bar{x}}}{\bar{x}}$ aumenta (disminuye) entonces aumenta (disminuye) $R_{\vec{x}}$.

   Se observa que la media $\bar{\bar{x}}$ da mayor peso a las rentas grandes que a las pequeñas.

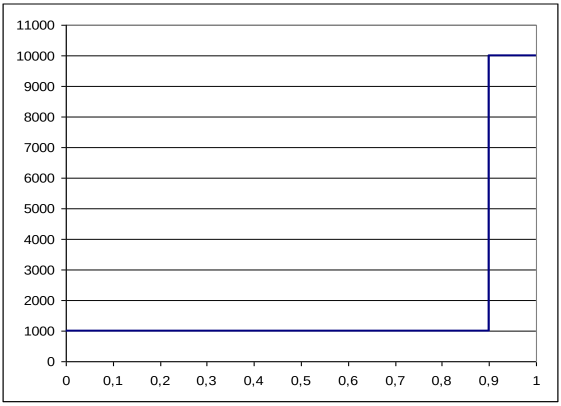
4. Cuando usamos la diferencia media de Gini con repetición, el criterio de Sen es: $\bar{x}\left(1 - R'_{\vec{x}}\right) = \dfrac{2\sum_{k=1}^{n}\left(n + \frac{1}{2} - k\right)x_k}{n^2}$, donde $R'_{\vec{x}}$ es la razón de concentración de Gini con repetición[1]. Esta fórmula tiene la siguiente interpretación geométrica.

[1] En este caso la razón de concentración de Gini es el cociente entre la diferencia media con repetición y el doble de la media aritmética.

Partimos del vector ordenado de rentas del ejemplo de Pareto

$$\vec{\tilde{x}} = (1.000, 1.000, 1.000, 1.000, 1.000, 1.000, 1.000, 1.000, 1.000, 10.000)\,,$$

Sabemos que la función cuantil de este vector es,



A partir de esta función vamos a construir la curva generalizada de Lorenz que llamaremos $G_{\vec{x}}(u)$.

Si partimos de los datos desagregados a nivel individual, ordenados de menor a mayor, $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$, la curva de Lorenz Generalizada discreta es

$$G_{\vec{x}}\left(\frac{k}{n}\right) = \overline{x}_k\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n.,$$

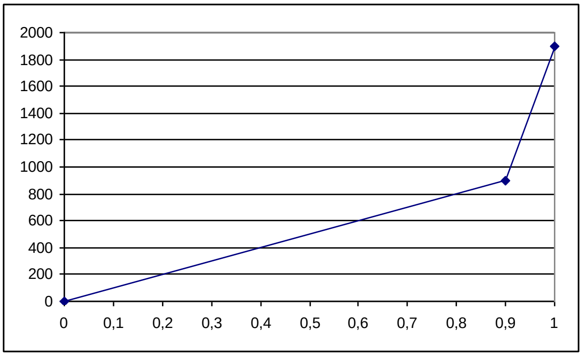
donde $\overline{x}_k = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} x_i}{n}$ es la media recortada k-ésima.

Esta curva es también igual a

$$G_{\vec{x}}\left(\frac{k}{n}\right) = \overline{x}_k = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i}{k}\frac{k}{n}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Vemos ahora que la curva de Lorenz Generalizada es, para $\dfrac{k}{n}$, el producto de la media aritmética para los rangos menores o iguales que k y la proporción $\dfrac{k}{n}$.

Aplicando esta últimas definiciones obtenemos la siguiente curva generalizada de Lorenz para el ejemplo de Pareto



Para el ejemplo que estamos viendo de Pareto, el área por debajo de la función generalizada de Lorenz es igual a 545. Se puede probar que $\overline{x}\left(1-R'_{\overline{x}}\right)$ es precisamente el doble de dicha área, es decir 1.090.

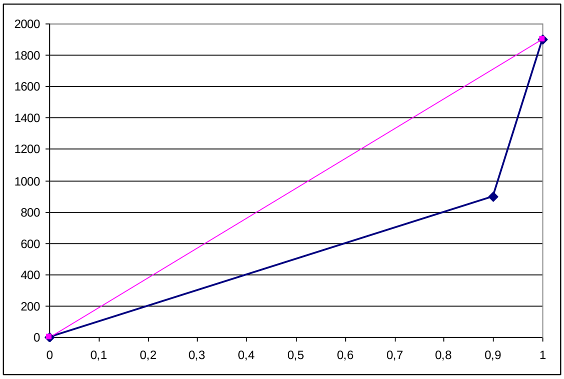
Es decir

$$\overline{x}\left(1-R'_{\overline{x}}\right)=2A.$$

donde A *es el área por debajo de la curva generalizada de Lorenz*.

Así, el criterio de Sen, equivale a comparar el doble del área que está por debajo de la función generalizada de Lorenz.

También, de la siguiente gráfica



que recoge la curva generalizada de Lorenz y el segmento de igualdad que une los puntos $(0,0)$ y $(1,\overline{x})$, viendo que el cociente entre área, que encierra el segmento de igualdad y la curva generalizada de Lorenz (B), y el área por debajo del segmento de igualdad es precisamente la razón de concentración repetida de Gini, es decir $R'_{\overline{x}}$. Es decir,

$$R'_{\bar{x}} = \frac{B}{\frac{\bar{x}}{2}},$$

donde $\frac{\bar{x}}{2}$ es el área del triángulo con vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(1,\bar{x})$. El valor $B = \frac{\bar{x}}{2} - A$ es el área entre el segmento de igualdad y la curva generalizada de Lorenz, que llamaremos área de Lorenz generalizada (ALG).

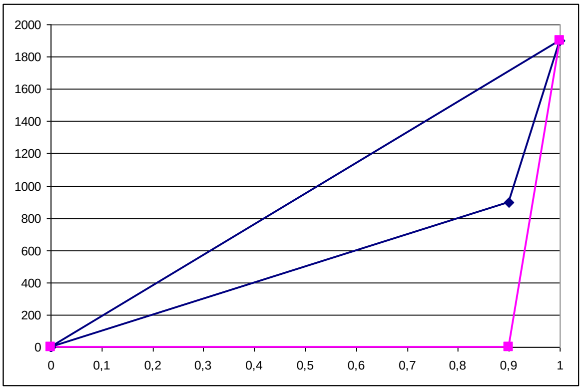
Veamos que el doble del área de Lorenz Generalizada, 2B, es la mitad de la Diferencia Media de Gini con repetición, es decir que

$$2B = 2ALG = 2\left(\frac{\bar{x}}{2} - A\right) = \bar{x}R'_x = \bar{x}\frac{DMG'}{2\bar{x}} = \frac{DMG'}{2},$$

donde $\frac{DMG'}{2} = \frac{\sum_{k=1}^{n}(2k-1-n)x_k}{n^2}$, que, al igual que la razón de Gini, no es compatible con el criterio funcional de desigualdad de Pareto.

Vemos pues que la curva de Lorenz Generalizada recoge una medida de *dispersión absoluta*, la Diferencia Media de Gini con repetición, 2B, dependiente de la convexidad de dicha curva, y, también, la medida de Sen (2A), *una medida de concentración y crecimiento*. Por último, el cociente entre B y el área del triángulo, $\frac{\bar{x}}{2}$, resulta ser la concentración de Gini con reposición.

5. Veamos ahora la gráfica siguiente:



Vemos en primer lugar el segmento de igualdad que une los puntos $(0,0)$ y $(1,\bar{x})$. También la gráfica recoge la curva generalizada de Lorenz para los datos del vector de rentas $\tilde{\vec{x}}$ y la curva generalizada de Lorenz cuando la concentración es máxima. Ahora resulta la fórmula siguiente:

$$R_{\vec{x}} = \frac{\frac{\overline{x}}{2} - A}{\frac{\overline{x}}{2} - A'}, \tag{5}$$

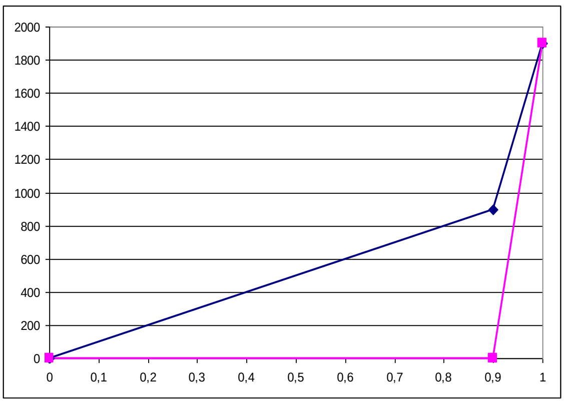
donde $A' = \frac{\overline{x}}{2n}$ es el área por debajo de la curva de Lorenz generalizada cuando la concentración es máxima. Se trata del área del triángulo con puntos (0,9; 0), (1, 0) y $(1, \overline{x})$.

Vemos que el numerador de (5) es el área de Lorenz generalizada (ALG), igual a B, y el denominador es el área máxima de Lorenz generalizada (área entre el segmento de igualdad y la curva generalizada de Lorenz cuando la concentración es máxima que llamaremos AMLG). Es decir

$$R_{\vec{x}} = \frac{ALG}{AMLG},$$

es la razón de Gini sin repetición.

6. Cuando usamos la fórmula $\overline{x}\left(1 - R_{\overline{x}}\right)$, la interpretación geométrica es más complicada. La gráfica siguiente recoge la función generalizada de Lorenz del vector $\tilde{\vec{x}}$, curva superior de color azul, y la función generalizada de Lorenz para el caso de máxima concentración, es decir que el individuo rico se lleve el total de la renta. Esta última curva es la que está debajo de la anterior y es de color rojo.



A partir de (5) se obtiene que es[2]:

$$\bar{x}\left(1-R_{\bar{x}}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)=2\left[A-A'\right],$$

donde $A-A'$ es el área encerrada entre la curva de Lorenz generalizada y la curva de Lorenz generalizada con mayor concentración. Así vemos que el doble del área entre una situación real, curva azul, y la máxima concentración, curva roja, es igual a $\bar{x}\left(1-R_{\bar{x}}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)$. En el ejemplo, $A=545$, $A'=95$, $2\left[A-A'\right]=900$, y $\bar{x}\left(1-R_{\bar{x}}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)=900.$

7. En el caso continuo. La razón de Gini con repetición para una variable aleatoria X no negativa es

$$R'_x=1-2\int_0^1 L(u)\,du,$$

donde $L(u)=\frac{1}{\mu}\int_0^u Q(z)\,dz$ es la Curva de Lorenz y $Q(z)$ es la función cuantil de la v.a. X, siendo μ su esperanza matemática.

La curva de Lorenz Generalizada es $G(u)=\int_0^u Q(z)\,dz$, donde el valor de u está el intervalo $[0,1]$. Ahora deducimos que

$$\left(1-R'_x\right)\mu=2\int_0^1 G(u)\,du,$$

luego el doble del área por debajo de la Curva de Lorenz Generalizada, que llamaremos 2A, es igual a criterio de Amarty Sen (1976), $\left(1-R'_x\right)\mu$.

Si ahora calculamos el doble del área entre el segmento que une los puntos (0,0) y $(1,\mu)$ y la Curva de Lorenz Generalizada, que llamamos 2B, entonces resulta lo siguiente:

$$2B=2\int_0^1\left(\mu u-G(u)\right)du=\frac{DMG}{2}, \qquad (6)$$

donde DMG es la diferencia media de Gini con repetición.

[2] Ya que $1-R_{\bar{x}}=\dfrac{A-A'}{\frac{\bar{x}}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)}$.

La fórmula (6) ya fue obtenida por Gini (1912) mediante la siguiente expresión

$$\frac{DMG'}{2} = 2\int_0^{\infty} x\left[F(x)-\frac{1}{2}\right] f(x)\,dx, \tag{7}$$

que por el cambio de variable $u = F(x)$, se obtiene la expresión

$$\frac{DMG'}{2} = 2\int_0^{1} Q(u)\left[u-\frac{1}{2}\right] du, \tag{8}$$

que operando da lugar a la fórmula (6).

La fórmula (7) permite expresar la razón de Gini con repetición como

$$R'_x = \frac{\mathrm{Cov}\left[X, F(x)\right]}{\frac{\mu}{2}}, \tag{9}$$

es decir, como la covarianza entre las variables aleatorias X y $F(X)$.

Por último, el cociente $\frac{B}{\frac{\mu}{2}} = \frac{\frac{MDG}{4}}{\frac{\mu}{2}} = \frac{MDG}{2\mu} = R'_x$, y usando (6) resulta

$$R'_x = \frac{2}{\mu}\int_0^1 \left(\mu u - G(u)\right) du,$$

que permite calcular la razón de Gini a partir de la curva de Lorenz generalizada.

8. Hemos visto que el criterio escalar de desigualdad-crecimiento $\bar{x}\left(1-R'_x\right)$ es compatible con el criterio de desigualdad de Pareto o, su equivalencia, con el criterio de dominancia estocástica de orden uno. Si interpretamos este criterio de Sen como una función $W(\vec{x})$ de R^n en R, vemos que la función $W(\vec{x}) = \bar{x}\left(1-R'_{\vec{x}}\right) = \frac{\sum_{k=1}^{n}(2n-2k+1)x_k}{n^2}$, que es igual para toda permutación del vector $\vec{x}$ de R^n, es decir que $W(\vec{x})$ es simétrica y, además, cuando $\vec{y}$, vector de R^n, *es una mejora por rangos de Pareto de* $\vec{x}$, entonces $W(\vec{y}) \geq W(\vec{x})$, es decir la función $W(\vec{x})$ es creciente. Podemos ver en P. D. Thistle (1989) la equivalencia entre dominancia estocástica de orden uno y las funciones $W(\vec{x})$ crecientes y simétricas (su proposición 5). La función del tipo $W(\vec{x})$ se suele denominar función de *bienestar social*. Si replicamos r veces los valores de las rentas, es decir que

el vector $\vec{x}_r$ sea $x_1, x_1, \ldots r \ldots x_1;\ x_2, x_2, \ldots r \ldots x_2; \ldots;\ x_n, x_n, \ldots r \ldots x_n$, entones $W\left(\vec{x}_r\right) = W\left(\vec{x}\right)$. En resumen: la función $W\left(\vec{x}\right) = \dfrac{\sum_{k=1}^{n}\left(2n-2k+1\right)x_k}{n^2}$ está de acuerdo con la mejora por rangos de Pareto (criterio de desigualdad de Pareto), es simétrica y verifica el axioma de replicación de Sen.

9. Veamos que $W\left(\vec{x}\right) = \bar{x}\left(1 - R_{\vec{x}}\right)$ verifica el axioma de replicación de la población. Si $n_r = r\,n$, donde r es un entero positivo, entonces

$$W\left(\vec{x}_r\right) = \frac{\sum_{k=1}^{n_r}\left(2n_r - 2k + 1\right)x_k}{n_r^2} =$$

$$= \frac{\left(2rn+1\right)r\sum_{k=1}^{n} x_k - 2\sum_{k=1}^{n}\left(r^2\left(k-1\right) + \dfrac{r\left(r+1\right)}{2}\right)x_k}{r^2 n^2} = W\left(\vec{x}\right)$$

10. $W\left(\vec{x}\right) = \bar{x}\left(1 - R'_{\vec{x}}\right)$ es además una función *S*-cóncava. Si la curva de Lorenz del vector $\vec{y}$ está por encima de la curva de Lorenz del vector $\vec{x}$, entonces $R'_{\vec{y}} \leq R'_{\vec{x}}$, y exigiendo que $\vec{y}$ *sea una mejora por rangos de Pareto de* $\vec{x}$, es decir si $\vec{y} \geq \vec{x}$ entonces $W\left(\vec{y}\right) \geq W\left(\vec{x}\right)$.

11. En general, $\vec{y}$ *es una mejora por rangos de Pareto de* $\vec{x}$ siempre y cuando $\sum_{k=1}^{n} u\left(x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} u\left(y_k\right)$ para toda función no decreciente $u\left(x\right): R_+ \to R$. Las funciones $\dfrac{\sum_{k=1}^{n} u\left(x_k\right)}{r}$ de $R_+^n \to R$ son simétricas, no decrecientes y, además, verifican en criterio de replicación de Sen cuando se replica el vector $\vec{x}$ *r* veces.

12. La dominancia estocástica de orden uno, es decir que $F_{\vec{y}}\left(z\right) \leq F_{\vec{x}}\left(z\right)$, para toda renta z no negativa, siendo al menos una desigualdad estricta, implica que $G_{\vec{y}}\left(u\right) \geq G_{\vec{x}}\left(u\right)$, para todo u del intervalo $\left[0,1\right]$. Este resultado es consecuencia del Lema IV y de la definición de la Curva de Lorenz Generalizada, que $G\left(u\right) = \int_0^u Q\left(z\right)\,dz$.

13. El criterio de desigualdad de Pareto o, su equivalencia, el criterio de dominancia estocástica de orden uno, no incluye, en general, el principio de transferencias de

rentas altas a bajas. Una propuesta debida a Shorrocks (1983) y Kakwani (1984) fue añadir que las funciones de bienestar, $W(\vec{x})$, sean S-cóncavas, además de verificar la mejora por rangos de Pareto, la simetría y la replicación de la población. Estos autores demostraron que si la curva de Lorenz generalizada de $\vec{y}$ está por encima de la curva de Lorenz generalizada de $\vec{x}$ es equivalente a que $W(\vec{y}) \geq W(\vec{x})$, para toda función de bienestar, $W(.)$, que sea creciente, simétrica, con replicación de la población y S-cóncava. Este criterio basado en las curvas de Lorenz generalizadas es equivalente a criterio de dominancia estocástica de orden dos (DEO2).

14. La curva de Lorenz generalizada del vector $\vec{y}$, $G_{\vec{y}}(u)$, *es mayor o igual, con alguna desigualdad estricta, que la curva de Lorenz generalizada del vector* $\vec{x}$**,** $G_{\vec{x}}(u)$, siempre y cuando $\sum_{k=1}^{n} u(x_k) \leq \sum_{k=1}^{n} u(y_k)$ para toda función creciente, continua y estrictamente cóncava $u(x): R_+ \to R$, Las funciones $\frac{\sum_{k=1}^{n} u(x_k)}{r}$ de $R_+^n \to R$ son estrictamente cóncavas, simétricas y, además, verifican en criterio de replicación de Sen cuando se replica el vector $\vec{x}$ r veces.

15. Los criterios de dominancia estocástica de orden uno, DEO1, y de orden dos, DEO2, han sido aplicados para comparar distribuciones de rentas por deciles entre varios conjuntos de países. Shorrocks (1983) aplicó DEO2 a veinte países y Kakwani (1984) a 23 países. Bishop, Formby y Thistle (1991) han aplicado el criterio de DEO1 a la muestra de 20 países de Shorrocks, que han ampliado hasta 26 países, con datos de Kravis, Heston y Summers (1978) y Jain' (1975), y, también, a la muestra de 23 países de Kakwani. Los resultados los recogemos en las dos siguiente tablas.

	DEO1	%	DEO2	%
Dominancia	245	75,4	269	82,8
Se cortan	80	24,6	56	57,2
Total	325	100	325	100

Vemos que con 26 países tenemos 325 pares de comparaciones. También de los 269 pares de comparaciones con DEO2, 245 corresponden a DEO1, un 91,07%.

	DEO1	%	DEO2	%
Dominancia	197	77,9	210	83,6
Se cortan	56	22,1	43	16,4
Total	253	100	253	100

Vemos que con 23 países tenemos 253 pares de comparaciones. También de los 210 pares de comparaciones con DEO2, 197 corresponden a DEO1, un 93,80%.

Estos ejemplos muestran la importancia de la dominancia por rangos de Pareto para comparar pares de distribuciones de rentas de países, lo que nos conduce a pensar que en el criterio de DEO2 sigue pesando más el crecimiento de las rentas medias de los países que el factor de equidad.

16. En las tablas del apartado anterior se observa que las funciones de distribución de las rentas consideradas, que como sabemos son equivalente a las correspondientes funciones cuantiles, se cortan más veces que las curva de Lorenz generalizadas. Cuando $F_{\ddot{y}}(z)$ corta una vez por debajo a $F_{\ddot{x}}(z)$, $\mu_y \geq \mu_x$ y las rentas mínimas $h_y \geq h_x$, entonces $G_{\ddot{y}}(u) \geq G_{\ddot{x}}(u)$ para todo u del intervalo $[0,1]$ (P.D. Thistle, 1989). Este resultado explica que los cortes con las curvas de Lorenz generalizadas sean menores que con las funciones de distribución.

BIBLIOGRAFÍA

BISHOP, J.A., FORMBY, J.P. and P.D. THISTLE (1991), "Rank dominance and international comparisons of income distributions", *European Economics Review*, **35,** pp. 1399-1409.

BORTKIEWICZ, L.V. (1931), *Die Disparitätsmasse der Einkommensstatistik*. XII Session de L'Institut International de Statistique, Tokio, pp. 189-298.

DASGUPTA, P, SEN, A. and DAID STARRETT (1973), "Notes on the Measurement of inequality", *Journal of Economic Theory*, **6,** pp. 180-187.

GINI, C. (1912), *Variabilità e Mutabilità: contributo allo Studio delle distributioni e delle relazioni statistiche*, Facoltaá di Giurisprudenza della R. Universitá dei Cagliari, aano III, parte 2ª.

KAKWANI, N. (1984), "Welfare ranking of income distributions", en R. L. BASMANN and G.F. RHODES, *Advances in econometrics*, **3,** JAI Press, Greewich.

KRAVIS, I.B., A.W. HESTON and R. SUMMERS (1978), "Real GDP per capita for more than one hundred countries", *Economic Journal*, **88,** pp. 215-242.

PRETO, V. (1897), *Cours d'économic politique*, Tomo II, Rouge, Lausanne.

RUBIN SAPOSNIK (1981), "Rank-dominance in income distribution", *Public Choice*, **36,** pp. 147-151.

SEN, A. K. (1976), "Real National Income", *Review of Economic Studies*, **43**.

SOHRROCKS. A.T. (1983), "Ranking income distribution", *Economica*, **50,** pp. 3-17.

THISTLE, P.D. (1989), "Ranking distribution with generalized Lorenz curves", *Southern Economic Journal*, **56, 1,** pp. 1-12.